Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vladimíra Sečkárová

Stejnoměrně nejsilnější test. Stejnoměrně nejsilnější nestranný test

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jozef Juríček
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2008

Na tomto mieste by som rada poďakovala svojmu vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Jozefovi Juríčkovi za odborné vedenie, rady a pripomienky pri jej tvorení. A tiež svojej mame za neustálu morálnu podporu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 30.05.2008 Vladimíra Sečkárová

Obsah

Názov práce: Stejnoměrně nejsilnější test. Stejnoměrně nejsilnější nestranný test
Autor: Vladimíra Sečkárová
Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky
Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Jozef Juríček
e-mail vedúceho: jurij1am@artax.karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá problematikou testovania hypotéz, konkrétne existenciou rovnomerne najsilnejšieho a rovnomerne najsilnejšieho nestranného testu. Prvá kapitola obsahuje základné pojmy testovania hypotéz. V druhej kapitole je zavedený pojem rovnomerne najsilnejšieho testu ako i jeho odvodenie v rôznych obecných prípadoch i pre parametre normálneho rozdelenia. Tretia kapitola sa zaoberá rovnomerne najsilnejším nestranným testom a jeho odvodením obecne a aj pre parametre normálneho rozdelenia.

Kľúčové slová: testovanie hypotéz, najsilnejší test, rovnomerne najsilnejší test, rovnomerne najsilnejší nestranný test

Title: Uniformly most powerful test. Uniformly most powerful unbiased test
Author: Vladimíra Sečkárová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Jozef Juríček
Supervisor's e-mail address: jurij1am@artax.karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study problems of hypotheses testing, particularly existence of the uniformly most powerful and the uniformly most powerful unbiased test. In the first chapter the basic terms of hypotheses testing are introduced. In the second chapter the uniformly most powerful test as well as its derivation in various general cases and for parameters of the normal distribution are presented. The third chapter focuses on the uniformly most powerful unbiased test and its derivation in general and also for parameters of the normal distribution.

Keywords: hypotheses testing, most powerful test, uniformly most powerful test, uniformly most powerful unbiased test

Kapitola 1

Úvod - testovanie hypotéz

Nielen v matematike, ale i v bežnom živote sa často stretávame s rozličnými výrokmi či tvrdeniami, o správnosti ktorých nič nevieme. V matematike, špeciálne v štatistike existuje časť, ktorá sa zaoberá rozhodovaním medzi dvoma možnosťami: zamietnutím alebo nezamietnutím sformulovaného tvrdenia - **hypotézy**. Proces rozhodovania sa nazýva **testovanie hypotéz**.
Aby sme mohli pokračovať v teórii ďalej, zavedieme niekoľko potrebných základných definícií a uvedieme základné tvrdenie.

Definícia 1.1 (Náhodná veličina)**.** Nech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravdepodobnostný priestor a $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ je merateľný priestor. Budeme hovoriť, že zobrazenie $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ je **náhodná veličina** s hodnotami v $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, ak je merateľné, t.j.

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \quad \in \mathcal{A}$$

pre každé $B \in \mathcal{B}$.

Definícia 1.2 (Náhodný vektor)**.** Pre náhodnú veličiny X_i s hodnotami v $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i)$ budeme hovoriť, že $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ je **(n-rozmerný reálny) náhodný vektor**, ak je náhodnou veličinou s hodnotami v $(\times_{i=1}^n \mathcal{X}_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i)$.

Priestor všetkých hodnôt, ktoré môže náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ nadobúdať, nazývame **výberový** (**stavový**) **priestor** a značíme ho $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. Vzhľadom k predošlej definícii teda platí $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \times_{i=1}^n \mathcal{X}_i$.

O merateľnosti náhodného vektoru hovorí nasledujúca veta:

Veta 1.3 (O kolekcii náhodných veličín)**.** *Nech* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *je pravdepodobnostný priestor a* $n \in \mathbb{N}$. *Nech pre* $i = 1, 2, ..., n$ *sú dané* $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i)$ *merateľné priestory a* $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i))$ *náhodné veličiny. Potom* $(X_1, X_2, ..., X_n)^T$ *je náhodný vektor s hodnotami v* $(\times_{i=1}^n \mathcal{X}_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i)$.

Dôkaz. Viď [4], Veta 2.1. □

Máme náhodý vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, u ktorého predpokladáme, že má rozdelenie P_θ, kde P_θ je z rodiny rozdelení $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, kde Θ je parametrický priestor. Je to teda rozdelenie, ktoré závisí na parametri $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \subset \mathbb{R}^k$. Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ pre nás predstavuje množinu pozorovaní, ktoré zaznamenávame.

Definícia 1.4 (Náhodný výber)**.** n-tici nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín hovoríme **náhodný výber** (z tohto rozdelenia).

Aby ďalšia vyložená teória bola správne pochopená, je potrebné mať jasnú predstavu, čo sa myslí pod pojmom parametrický priestor a čo je jeho podmnožinou (definovanou hypotézou).

Príklad 1.5.

(a) Ak X má rozdelenie $\mathcal{B}i(n,p)$ a testujeme $H_0 : p = p_0$, potom H_0 môžeme zapísať ako
$H_0 = \{p : p = p_0\}$ a $H_0 \cup H_1 = \{p : p \in [0,1]\}$.

(b) Ak X má rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, kde oba parametre μ a σ^2 sú neznáme a testujeme $H_0 : \sigma^2 = {\sigma_0}^2$, potom
$H_0 \cup H_1 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 \in (0, \infty)\}$
$H_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 = {\sigma_0}^2\}$

Rozdelenia z rodiny rozdelení $\mathcal{P}$ môžeme rozdeliť na dve skupiny (množiny): množina M_1 tých rozdelení, pre ktoré hypotéza platí, a množina M_2 tých rozdelení z $\mathcal{P}$, pre ktoré hypotéza neplatí. Týmto spôsobom sme vyjadrili dve disjunktné triedy a odpovedajúc k tomu množiny Θ_0, $\Theta_1 \subset \Theta$, pre ktoré platí:

$$\Theta_0 \neq \emptyset,$$

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta,$$

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset.$$

Presnejšie je hypotéza ekvivalentná tvrdeniu, že θ je prvkom množiny Θ_0. Pretože si tým však nie sme istí, nazveme toto tvrdenie *nulovou hypotézou*. Stručné používané značenie je :

$$H_0 : \theta \in \Theta_0.$$

Analogicky nazývame rozdelenia z množiny M_2 *alternatívne hypotézy* alebo *alternatívy* k H_0. Používané značenie:

$$H_1 : \theta \notin \Theta_0,$$

ekvivalentný zápis je

$$H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$$

Definícia 1.6 (Jednoduchá hypotéza a alternatíva, zložená hypotéza a alternatíva)**.** Ak je množina Θ_0 jednobodová, hovoríme, že hypotéza H_0 je **jednoduchá**, ak je množina Θ_1 jednobodová, hovoríme, že alternatíva H_1 je **jednoduchá**. Ak množina Θ_0 obsahuje najmenej dva rôzne prvky, hovoríme o **zloženej hypotéze**, analaogicky pre množinu Θ_1 hovoríme o **zloženej alternatíve**.

O platnosti hypotézy H_0 sa rozhodujeme na základe pozorovania náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. *Nenáhodná* procedúra testovania priradí každej hodnote $x \in \mathcal{X}$, kde $\mathcal{X}$ je výberový priestor všetkých x, jednu z týchto dvoch možností: zamietnutie alebo nezamietnutie H_0, a zároveň dostaneme rozklad výberového priestoru na dve doplnkové časti : označme ich W a A. Platí teda:

$$\mathcal{X} = W \cup A.$$

Definícia 1.7 (Obor prijatia, kritický obor,test)**.** Množinu A všetkých x, pre ktoré hypotézu H_0 nezamietame, nazývame **obor prijatia**, množinu W všetkých x, pre ktoré hypotézu H_0 zamietame, nazývame **kritický obor**. Každé takéto rozdelenie $\mathcal{X}$ sa nazýva **testová funkcia** (zaužívané je aj pomenovanie **test**).

Pri rozhodovaní, či zamietnuť alebo nezamietnuť *nulovú hypotézu* H_0, môžu nastať tieto situácie:

	H_0 platí	H_0 neplatí, H_1 platí
zamietam H_0	nesprávne rozhodnutie	správne rozhodnutie
nezamietam H_0	správne rozhodnutie	nesprávne rozhodnutie

Vidíme, že pri rozhodovaní sa môžeme dopustiť dvoch chybných rozhodnutí:

Definícia 1.8 (Chyba prvého a druhého druhu)**.**

1. zamietneme H_0, aj keď H_0 platí - **chyba prvého druhu**

2. nezamietneme H_0, aj keď H_0 neplatí - **chyba druhého druhu**.

Následky týchto chýb sú rozdielne, preto za hypotézu volíme to tvrdenie, ktorého neoprávnené zamietnutie má závažnejšie následky. Napríklad ak testujeme u pacienta prítomnosť nejakej choroby, nesprávne rozhodnutie týkajúce sa nutnosti liečenia môže spôsobiť pacientov nekomfort a finančné straty. Na druhej strane, zlyhanie diagnostikovania prítomnosti ochorenia u pacienta môže viesť až k jeho smrti.

Keďže chyba prvého druhu môže mať závažnejšie následky, budeme chcieť, aby k nej došlo iba s veľmi malou pravdepodonosťou, čo v bežnom živote vnímame ako situáciu, že chyba prvého druhu vôbec nemohla nastať. Volíme teda nejaké číslo α medzi 0 a 1 a požadujeme, aby

$$P(X \in W) \leq \alpha \quad \text{pre všetky } \theta \in \Theta_0. \tag{1.1}$$

Definícia 1.9 (Hladina významnosti)**.** Číslo α spomenuté vyššie a spĺňajúce (1.1) nazývame **hladinou významnosti**.

Našou úlohou teda bude zvoliť kritický obor W tak, aby pravdepodobnosť chyby prvého druhu bola maximálne α. Keďže nie vždy ide minimalizovať chybu prvého a druhého druhu súčasne, najlepšia voľba kritického oboru bude pre nás teda tá, pri ktorej je pravdepodobnosť, že nastala chyba prvého druhu, maximálne rovná α a pravdepodobnosť chyby druhého druhu je minimálna.

V prípade zloženej hypotézy potrebujeme nasledujúcu definíciu.

Definícia 1.10 (Hladina testu)**. Hladinu testu** (používa sa i pojem **veľkosť testu**) definujeme ako číslo :

$$\alpha_0 = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta \left(X \in W \right), \tag{1.2}$$

kde P_θ je pravdepodobnosť, že X padne do množiny W za podmienky, že θ je skutočná hodnota parametru.

Naším cieľom je zostrojiť taký test, ktorý by nepresiahol túto hladinu.

Definícia 1.11 (Sila testu proti alternatíve, silofunkcia)**.** Doplnok chyby 2. druhu do hodnoty 1 nazývame **sila testu proti alternatíve**:

$$\begin{aligned} 1 - P_\theta \left(\text{nezamietam } H_0 | H_0 \text{ neplatí}\right) &= \\ = P_\theta \left(\text{zamietam } H_0 | H_0 \text{ neplatí}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pravdepodobnosť, že zamietame H_0 v prípade, že hodnota skutočného parametru je θ a uvažujúc ju ako funkciu θ, sa nazýva **silofunkcia testu** :

$$\beta \left(\theta\right) = P_\theta(\text{zamietame } H_0) = P_\theta(X \in W).$$

Pri testovaní hypotéz sa snažíme nájsť test s hladinou nanajvýš rovnou α. U diskrétnych rozdelení sa stáva, že hladina testu α_0 je iná (menšia) ako zvolená hodnota α. To viedlo k vytvoreniu teórie *znáhodnených testov*.

Definícia 1.12 (Znáhodnený test, testová funkcia, hladina znáhodneného testu)**.** Majme na $\mathbb{R}^n$ definovanú merateľnú funkciu $\phi(x)$, pre ktorú platí $0 \leq \phi(x) \leq 1$. Ďalej nech sa realozoval vektor $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$. V takom prípade zamietame nulovú hypotézu s pravdepodobnosťou $\phi(x)$ a nezamietame s pravdepodobnosťou $1 - \phi(x)$. Po realizácii náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ sa musí uskutočniť ešte jeden náhodný pokus, až ten rozhodne o zamietnutí nulovej hypotézy. Tento proces sa nazýva **znáhodnený test** a funkcia sa nazýva **testová funkcia** (zaužívané je aj označenie **kritická funkcia**). Hladinou znáhodneného testu rozumieme číslo

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x}) \mathrm{d} P_\theta(\boldsymbol{x}).$$

Na záver malé pripomenutie pojmov, ktoré budeme ďalej často využívať.

Definícia 1.13 (Radon-Nikodymova derivácia, pravdepodobnostná hustota)**.** Ak μ je miera a f je nezáporná merateľná funkcia na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, potom

$$\nu(B) = \int_B f \mathrm{d}\mu \tag{1.4}$$

definuje novú mieru na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Fakt, že (1.4) platí pre všetky $B \in \mathcal{B}$ môžeme vyjadriť

$$\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu \quad \text{alebo} \quad f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}. \tag{1.5}$$

Nech μ a ν sú 2 dané σ-konečné miery na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Ak existuje funkcia f spĺňajúca (1.5), je určená týmto vzťahom pomocou tohto vzťahu až na množinu miery 0, pretože z

$$\int_B f \mathrm{d}\mu = \int_B g \mathrm{d}\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

plynie, že $f = g$ sk.vš.$[\mu]$. Takáto funkcia sa nazýva **Radon-Nikodymova derivácia** ν vzhľadom k μ a v špeciálnom prípade, kedy ν je pravdepodobnostná miera, je to **pravdepodobnostná hustota** ν vzhľadom k μ.

Definícia 1.14 (Absolútna spojitosť miery)**.** Miera ν je **absolútne spojitá** vzhľadom k μ ak:

$$\mu(B) = 0 \quad \text{implikuje} \quad \nu(B) = 0.$$

Definícia 1.15 (Distribučná funkcia)**.** Funkciu F nazveme **distribučná funkcia**, ak je neklesajúca, sprava spojitá a $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

Kapitola 2

Rovnomerne najsilnejší test

2.1 Jednoduchá hypotéza a jednoduchá alternatíva

Ako bolo spomenuté v predošlej kapitole, ak sú množiny Θ_0 a Θ_1 jednoprvkové, hovoríme o jednoduchej hypotéze a jednoduchej alternatíve. Zvoľme napríklad $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ a položme $\Theta_0 = \theta_0$. Označme pravdepodobnostné miery na priestoroch Θ_0, Θ_1 postupne $P_{\theta_0}, P_{\theta_1}$. Nech sú P_{θ_0} a P_{θ_1} absolútne spojité vzhľadom k nejakej σ-konečnej miere μ. Tento predpoklad nás nijak neobmedzuje, pretože za μ môžeme vziať napríklad $P_{\theta_0} + P_{\theta_1}$. Označme ešte hustoty k daným mieram $p_0(x), p_1(x)$.

Lemma 2.1 (Neymanova-Pearsonova)**.** *Nech k danému $\alpha \in (0,1)$ existuje také kladné číslo c, že pre množinu $W_0 = \{x : p_1(x) \geq cp_0(x)\}$ platí*

$$\int_{W_0} p_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha.$$

Potom pre ľubovoľnú množinu $W \in B_n$ spĺňajúcu podmienku

$$\int_{W} p_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \alpha$$

platí

$$\int_{W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_{W} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Dôkaz. Zaujíma nás, čo platí pre

$$\int_{W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{W} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ukážeme, ako vhodne sa dá tento výraz prepísať:

označme:

$$\int_{W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha_1, \quad \int_W p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha_1^*,$$

$$\int_{W_0 \setminus W} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha_2, \quad \int_{W \setminus W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha_2^*,$$

$$\int_{W_0 \cap W} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \gamma, \quad \int_W p_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \alpha^*.$$

Z množinovej teórie vieme, že $W_0 \setminus W$ a $W_0 \cap W$ sú dizjunktné množiny a $W_0 = (W_0 \setminus W) \cup (W_0 \cap W)$. Pre výraz, ktorý nás zaujíma, dostávame: $\alpha_1 - \alpha_1^* = (\alpha_2 + \gamma) - (\alpha_2^* + \gamma) = \alpha_2 - \alpha_2^*$, za predpokladu, že ak je akákoľvek z množín $W_0 \setminus W, W_0 \cap W$ prázdna, položíme integrál cez túto množinu rovný 0. Táto úvaha samozrejme platí aj opačne, teda $\alpha_2 - \alpha_2^* = (\alpha_2 + \gamma) - (\alpha_2^* + \gamma) = \alpha_1 - \alpha_1^*$. Pre výraz uvedený na začiatku dôkazu dostávame teda:

$$\int_{W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_W p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{W_0 \setminus W} p_1(x)\,\mathrm{d}(x) - \int_{W \setminus W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Uvedomíme si ešte, že množina $W_0 \setminus W$ je množina prvkov x iba z množiny W_0, pre ktoré platí $p_1(x) = cp_0(x)$, ďalej že na množine $W \setminus W_0$ bude $\int_{W \setminus W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_{W \setminus W_0} cp_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ (pretože z nej vyberieme iba prvky x, pre ktoré $p_1(x) = cp_0(x)$) a že $\alpha^* \leq \alpha$. Všetky doterajšie úvahy môžeme postupne zapísať formou nerovností a rovností nasledovne:

$$\int_{W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_W p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{W_0 \setminus W} p_1(x)\,\mathrm{d}(xx) - \int_{W \setminus W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geq$$

$$\geq \int_{W_0 \setminus W} cp_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{W \setminus W_0} cp_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{W_0} cp_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_W cp_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= c\left(\int_{W_0} p_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_W p_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) = c(\alpha - \alpha^*) \geq 0$$

Teda

$$\int_{W_0} p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_W p_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

$\square$

Pre θ_0, θ_1 testujme hypotézu H_0: $\theta = \theta_0$ proti H_1: $\theta = \theta_1$. Tvrdenie vety 2.1 môžeme potom interpretovať nasledovne:
Zo všetkých testov hypotézy H_0 majúcich hladinu α má test s kritickým oborom W_0 najmenšiu pravdepodobnosť chyby druhého druhu. Hovoríme, že tento test je *najsilnejší* medzi všetkými testami hypotézy H_0 proti H_1 na hladine α. Prepíšme to formálne pomocou definície:

Definícia 2.2 (Najsilnejší test)**.** Test jednoduchej hypotézy H_0 proti jednoduchej alternatíve H_1, ktorý má najmenšiu pravdepodobnosť chyby druhého druhu (alebo ekvivalentne najväčšiu hodnotu silofunkcie $\beta(\theta)$) medzi všetkými testami veľkosti nie väčšej ako α, sa nazýva **najsilnejší test**.

Uvažujme, že ϕ je kritická funkcia, definovaná v predošlej kapitole. Ak rozdelenie náhodnej veličiny X je P_θ, pravdepodobnosť zamietnutia je

$$E_\theta \phi(X) = \int_{\mathcal{X}} \phi(x) \mathrm{d}P_\theta(x).$$

Problém, ktorý máme pred sebou, je vybrať ϕ tak, aby sila bola maximálna, teda aby bola maximálna hodnota

$$\beta_\phi(\theta) = E_\theta \phi(X) \qquad \forall\ \theta \in \Theta_1 \tag{2.1}$$

prihliadajúc k podmienke

$$E_\theta \phi(X) \leq \alpha \qquad \forall\ \theta \in \Theta_0. \tag{2.2}$$

Typicky test, ktorý maximalizuje silu proti konkrétnej alternatíve z H_1, závisí na tejto alternatíve, takže musí byť zavedená doplnková podmienku, aby sme mohli definovať, čo sa myslí optimálnym testom. Je tu jedna dôležitá výnimka: ak ide o jednoduchú alternatívu, problém je úplne popísaný pomocou (2.1) a (2.2). Problém sa potom redukuje na matematický problém maximalizácie integrálu prihliadajúc na určité vedľajšie podmienky. Všetka teória ohľadom tohto problému a jej štatistické aplikácie, vytvárajú hlavnú tému tejto kapitoly. V špeciálnych prípadoch sa samozrejme môže stať, že rovnaký test maximalizuje silu pre všetky alternatívy v H_1 i vtedy, ak H_1 je zložená alternatíva. V takomto prípade môžeme zaviesť nasledujúcu definíciu:

Definícia 2.3 (Rovnomerne najsilnejší test)**.** Najsilnejší test H_0 proti H_1, ktorý maximalizuje silu testu proti každej alternatíve z H_1, sa nazýva **rovnomerne najsilnejší test** (UMP[1]).

Lemma 2.4 (Neymannova-Pearsonova pre znáhodnené testy)**.** *Nech P_0 a P_1 sú 2 pravdepodobnostné rozdelenia na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ s hustotami p_0 a p_1 vzhľadom k nejakej miere μ.*

[1]Uniformly Most Powerful

1 (Existencia). *Pre $\alpha \in (0,1)$ a konštantu k existuje pri testovaní $H_0 : p_0$ proti $H_1 : p_1$ test ϕ, pre ktorý platí:*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & ak \quad p_1(x) > kp_0(x), \\ 0 & ak \quad p_1(x) < kp_0(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

kde k a hodnota $\phi(x)$ pre $p_1(x) = kp_0(x)$ sú určené tak, aby platilo

$$E_0\phi(x) = \alpha. \tag{2.4}$$

2 (Postačujúca podmienka pre najsilnejší test). *Ak test spĺňa* (2.3) *a* (2.4) *pre nejaké k, potom je najsilnejším α-testom p_0 proti p_1.*

3 (Nutná podmienka pre najsilnejší test). *Ak $\phi(x)$ je najsilnejší α-test H_0 proti H_1, potom pre nejaké k spĺňa* (2.3) *skoro všade μ a spĺňa* (2.4)*, ak neexistuje test veľkosti $< \alpha$ a sily 1.*

Dôkaz. Pre $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$ sa veta ľahko dokáže pre za predpokladu, že hodnota $k = \infty$ je povolená v (2.3) a za predpokladu, že $0 \cdot \infty = 0$. V dôkaze ďalej predpokladajme, že $0 < \alpha < 1$.

(1) Nech $\alpha(c) = P_0\{p_1(X) > cp_0(X)\} = P_0\{x : p_1(x) > cp_0(x)\}$. Keďže túto pravdepodobnosť počítame vzhľadom k P_0, nerovnosť je potrebné uvažovať len v prípade, kedy $p_0(x) > 0$, teda $P_0\{x : p_1(x) > cp_0(x), p_0(x) > 0\}$. Takže $\alpha(c)$ je pravdepodobnosť, že náhodná veličina $p_1(X)/p_0(X)$ prekročí hodnotu c. Teda $1 - \alpha(c)$ je distribučná funckia a $\alpha(c)$ je neklesajúca a spojitá sprava, $\alpha(c-0) - \alpha(c) = P_0\{p_1(X)/p_0(X) = c\} = P_0\{x : p_1(x) = cp_0(x)\}$, $\alpha(-\infty) = 1$ a $\alpha(+\infty) = 0$. Pre dané α z $0 < \alpha < 1$ uvažujme c_0 tak, že $\alpha(c_0) \leq \alpha \leq \alpha(c_0 - 0)$, po úprave $0 \leq \alpha - \alpha(c_0 - 0) \leq \alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)$ a ďalej $0 \leq \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0-0) - \alpha(c_0)} \leq 1$ a uvažujme test daný:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{keď} \quad p_1(x) > c_0 p_0(x), \\ \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0-0) - \alpha(c_0)} & \text{keď} \quad p_1(x) = cp_0(x), \\ 0 & \text{keď} \quad p_1(x) < cp_0(x). \end{cases} \tag{2.5}$$

Je vidieť, že prostredný člen má význam, kým nenastane situácia $\alpha(c_0 - 0) = \alpha(c_0)$, vtedy $P_0\{p_1(X) = c_0 p_0(X)\} = P_0\{x : p_1(x) = c_0 p_0(x)\}$=0 a ϕ je definovaný sk.vš. Veľkosť testu ϕ je

$$E_0\phi(x) = 1.P_0\left\{\frac{p_1(X)}{p_0(X)} > c_0\right\} + \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)}.P_0\left\{\frac{p_1(X)}{p_0(X)} = c_0\right\} +$$

$$0.P_0\left\{\frac{p_1(X)}{p_0(X)} < c_0\right\} = \alpha(c_0) + \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0 - 0) - \alpha(c_0)}.(\alpha(c_0) - \alpha(c_0)) + 0 =$$

$$= \alpha(c_0) + (\alpha - \alpha(c_0)) + 0 = \alpha,$$

takže c_0 môžeme považovať za k uvedené v znení vety.

Ďalej chceme ukázať, že takéto c_0 je jediné. Ukážeme to sporom: nech existuje interval hodnôt c, pre ktoré $\alpha(c) = \alpha$. Označme tento interval (c', c'') a označme

$$C = \left\{ x : p_0(x) > 0 \text{ a } c' < \frac{p_1(x)}{p_0(x)} < c'' \right\} =$$

$$\left\{ x : p_0(x) > 0 \text{ a } c' < \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \right\} \cup \left\{ x : p_0(x) > 0 \text{ a } \frac{p_1(x)}{p_0(x)} < c'' \right\},$$

potom $P_0(C) = \alpha(c') + (-\alpha(c'' - 0)) = \alpha - \alpha = 0$. Dá sa ukázať, že ak reálna funkcia $f(x) > 0 \quad \forall x \in S$ a μ je σ-konečná miera, potom $\int_S f \mathrm{d}\mu = 0$ implikuje $\mu(S) = 0$. Teda $P_0(C) = 0$ implikuje $\mu(c) = 0$ a preto $P_1(C) = 0$. Takže množiny odpovedajúce dvom rôznym hodnotám c sa líšia iba na množine miery 0 vzhľadom k obom rozdeleniam P_0 a P_1, teda v bodoch, ktoré môžu byť vynechané z výberového priestoru (výberového priestoru $\mathcal{X}$ všetkýc hodnôt x, ktoré môže nadobúdať X).

(2) Uvažujme test ϕ spĺňajúci (2.3) a (2.4) a ľubovoľný iný test ϕ^* s $\alpha^* = E_0\phi^*(x) \leq \alpha$. Označme S^+ a S^- množiny výberového priestoru, kde $\phi(x) - \phi^*(x) > 0$ a $\phi(x) - \phi^*(x) < 0$, teda

$$S^+ = \{x : \phi(x) - \phi^*(x) > 0\} \qquad S^- = \{\phi(x) - \phi^*(x) < 0\}.$$

Ak x patrí do S^+, potom $\phi(x) > \phi^*(x)$, kde $\phi^*(x) \geq 0$ a teda z:

$$1 \geq \phi(x) > \phi^*(x) \geq 0,$$

vidíme, že $1 \geq \phi(x) > 0$ a $p_1(x) \geq kp_0(x)$ (viď dôkaz k časti (i) a znenie vety). Rovnakým spôsobom sa vyšetrí situácia, kedy x je z S^-, potom $\phi(x) < \phi^*(x)$, kde $\phi^*(x) \leq 1$ a teda z:

$$0 \leq \phi(x) < \phi^*(x) \leq 1,$$

je vidieť, že $0 \leq \phi(x) < 1$ a $p_1(x) \leq kp_0(x)$. Na základe predošlých úvah je viedieť, že:

$$\int_{S^+} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) \geq 0$$

$$\int_{S^-} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) \geq 0,$$

odkiaľ dostávame:

$$\int_{\mathcal{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{S^+ \cup S^-} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{S^+} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) +$$

$$\int_{S^-} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) \geq 0.$$

Rozdiel v sile testu ϕ a testu ϕ^* spĺňa

$$\int_{\mathcal{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))p_1(x)\mathrm{d}\mu(x) \geq k \int_{\mathcal{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))p_0(x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= k \left(\int_{\mathcal{X}} \phi(x)p_0(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_{\mathcal{X}} \phi^*(x)p_0(x)\mathrm{d}\mu(x) \right) =$$

$$= k \left(\int_{\mathcal{X}} \phi(x)\mathrm{d}P_0(x) - \int_{\mathcal{X}} \phi^*(x)\mathrm{d}P_0(x) \right) =$$

$$= k \left(E_0\phi(X) - E_0\phi^*(X) \right) = k(\alpha - \alpha^*) \geq 0,$$

pretože zo začiatku dôkazu tejto časti vieme, že $\alpha^* \leq \alpha$. Takže test ϕ spĺňajúci (2.3) a (2.4) je rovnomerne najsilnejším testom pre testovanie H_0 proti H_1.

(3) Nech ϕ^* je najsilnejší test na na hladine α pre testovanie H_0 proti H_1 a nech ϕ je test spĺňajúci (2.3) a (2.4). Uvažujme opäť množiny S^+ a S^- ako v dôkaze druhej časti, teda množiny, na ktorých sa ϕ a ϕ^* líšia. Uvažujme ďalej množiny M a S, pre ktoré platí:

$$M = \{x : p_1(x) \neq kp_0(x)\}$$

$$S = \left(S^+ \cup S^-\right) \cap M.$$

Použitím množinových operácií dostávame:

$$S = \left(S^+ \cap M\right) \cup \left(S^- \cap M\right) =$$

$$= (\{x : p_1(x) \geq kp_0(x)\} \cap \{x : p_1(x) \neq p_0(x)\}) \cup$$

$$(\{x : p_1(x) \leq kp_0(x)\} \cap \{x : p_1(x) \neq p_0(x)\}) =$$

$$= \{x : p_1(x) > kp_0(x)\} \cup \{x : p_1(x) < kp_0(x)\}$$

a predpokladajme, že $\mu(S) > 0$. Keďže ϕ je rôzne od ϕ^* na S a tiež $p_1(x) \neq kp_0(x)$ na S, dostávame, že $(\phi(x) - \phi^*)(p_1(x) - kp_0(x))$ je kladné na S, takže opäť použijeme tvrdenie, ktoré sme využili v dôkaze časti (2), ale v obmenenom tvare. Stadiaľ dostávame:

$$0 < \int_S (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{S^+ \cup S^-} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{\mathcal{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_1(x) - kp_0(x))\mathrm{d}\mu(x),$$

kde prvá rovnosť plynie z toho, že v prípade $p_1(x) = kp(x)$ je integrál na pravej strane rovný 0, druhú rovnosť sme odvodili v dôkaze časti (2). Z nerovnosti

$$\int_{\mathcal{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))p_1(x)\mathrm{d}\mu(x) = E_1(\phi(x) - \phi^*(x)) >$$

$$> kE_0(\phi(x) - \phi^*(x)) = k\int_{\mathcal{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))p_0(x)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= k(\alpha - \alpha) = 0$$

vyplýva, že ϕ je silnejší test ako ϕ^*, čo je v spore s predpokladom, že ϕ^* je najsilnejší test a teda $\mu(S) = 0$.

Ak by mal test ϕ^* veľkosť $< \alpha$ a silu < 1, bolo by možné doplniť oblasť zamietania hypotézy o body tak, aby sila testu dosiahla hodnotu 1 alebo veľkosť hodnotu α. Teda buď $E_0\phi^*(X) = \alpha$ alebo $E_1\phi^*(X) = 1$. (Ak by existoval test s veľkosťou $= \alpha$ a silou < 1, dokázali by sme uvedeným postupom dosiahnuť, aby tento test mal silu 1 a takisto v prípade, že test má veľkosť $< \alpha$ a silu $= 1$ by sme dokázali vyššie uvedeným postupom dosiahnuť, aby tento test mal hladinu rovnú α). □

Dôsledok 2.5. *Nech ϕ je najsilnejší test H_0 proti H_1 veľkosti α, kde $0 < \alpha < 1$. Označme silu tohto testu β. Potom platí $\alpha < \beta$ alebo $P_0 = P_1$.*

Dôkaz. Nech ϕ je najsilnejší test veľkosti α a sily β. Nech $\phi^* = \alpha$ je test veľkosti α. Potom platí:

$$\beta = E_1\phi(x) \geq E_1\phi^*(x) = E_1\alpha = \alpha,$$

stadiaľ jasne vidíme $\beta \geq \alpha$.

Ak $\alpha = \beta < 1$, potom ϕ^* je najsilnejší a podľa nutnej podmienky pre najsilnejší test z Lemmy 2.4 musí spĺňať (2.4) a to spĺňa v prípade, že $p_1(x) = p_0(x)$ sk.vš. $[\mu]$ a odtiaľ dostávame $P_0 = P_1$. □

2.2 Rozdelenia s monotónnym pomerom vierohodností

V najjednoduchšom prípade tohoto typu s jednostrannou hypotézou máme : $H_0 : \theta \leq \theta_1$. Všeobecne najsilnejší test H_0 proti alternatíve $H_1 : \theta_2 > \theta_1$ závisí na θ_2 a nie je rovnomerne najsilnejším testom. Avšak, ak sú splené dodatočné podmienky, UMP test existuje.

Definícia 2.6 (Štatistika)**.** Náhodnému vektoru $\boldsymbol{S} = (S_1(\boldsymbol{X}), \ldots, S_k(\boldsymbol{X}))$, kde $S_1(\boldsymbol{x}), \ldots, S_k(\boldsymbol{x})$ sú nejaké merateľné funkcie a ktorý nie je funkciou parametru $\boldsymbol{\theta}$, hovoríme **štatistika**.

Definícia 2.7 (Monotónny pomer vierohodností). Hovoríme, že rodina hustôt $\mathcal{P} = \{p_{\theta(x)}, \theta \in \Theta\}$ závislých na reálnom parametri, má **monotónny pomer vierohodností**, ak existuje štatistika $T(x)$ s reálnymi hodnotami taká, že pre všetky $\theta < \theta'$ rozdelenia P_θ a $P_{\theta'}$ sú rozdielne a podiel $p_{\theta'}(x)/p_{\theta(x)}$ je neklesajúcou funkciou $T(x)$.

Veta 2.8. *Nech θ je reálny parameter a nech náhodný vektor X má pravdepodobnostnú hustotu $p_{\theta(x)}$ s monotónnym pomerom vierohodností v $T(x)$.*

(i) *Pre hypotézu $H_0 : \theta \leq \theta_0$ proti alternatíve $H_1 : \theta > \theta_0$ existuje rovnomerne najsilnejší test, daný*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pre} \quad T(x) > C, \\ \gamma & \textit{pre} \quad T(x) = C, \\ 0 & \textit{pre} \quad T(x) < C, \end{cases} \tag{2.6}$$

kde C a γ sú určené výrazom

$$E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha. \tag{2.7}$$

(ii) *Silofunkcia*

$$\beta(\theta) = E_\theta \phi(X)$$

tohto testu je rýdzorastúca pre všetky θ, pre ktoré platí: $0 < \beta(\theta) < 1$.

(iii) *Pre všetky $\theta^{'}$, test určený* (2.6) *a* (2.7) *je rovnomerne najsilnejší pre hypotézu $H_0^{'} : \theta \leq \theta^{'}$ proti alternatíve $H_1^{'} : \theta > \theta^{'}$ na hladine $\alpha^{'} = \beta(\theta^{'})$.*

(iv) *Pre akúkoľvek hodnotu $\theta < \theta_0$ tento test minimalizuje $\beta(\theta)$ spomedzi všetkých testov spĺňajúcich* (2.7).

Dôkaz. (i) a (ii): Uvažujme najskôr hypotézu $\theta = \theta_0$ proti nejakej jednoduchej alternatíve $\theta_1 > \theta_0$, testovať teda budeme: $H_0' : \theta = \theta_0$ proti $H_1' : \theta = \theta_1$. Najvhodnejšie body x na zamietnutie sú tie, pre ktoré je $r(x) = p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x) = g[T(x)]$ dostatočne veľká. Ak $T(x) < T'(x)$, potom $r(x) \leq r(x')$ a x' je aspoň tak vhodný bod na zamietnutie, ako je bod x. Teda test, ktorý zamieta H_0 pre veľké hodnoty $T(x)$ je najsilnejší. Postup použitý v dôkaze Lemmy 2.4 v časti 1, by sme aplikovali na terajšiu situáciu a vidíme teda, že existuje hodnota γ a množina C, že platia (2.6) a (2.7). Uvažujme test: $H_0'' : \theta = \theta'$ proti $H_1'' : \theta = \theta''$ pre $\theta' < \theta''$. Z Lemmy 2.4 časti 2 je tento výsledný test tiež MP pre testovanie $P_{\theta'}$ proti $P_{\theta''}$ na hladine $\alpha' = E_{\theta'}\phi(X) = \beta(\theta')$ za podmienky $\theta' < \theta''$.

Teda tento test je najsilnejší α'-test ($0 < \alpha' < 1$) pre testovanie $P_{\theta'}$ proti $P_{\theta''}$ za podmienky $\theta' < \theta''$. Označme jeho silu $\beta' = \beta(\theta'') = E_{\theta''}\phi(X)$. Potom z Dôsledku 2.5 vyplýva :

$$\beta(\theta') = E_{\theta'}\phi(X) = \alpha' \leq \beta' = E_{\theta''}\phi(X) = \beta(\theta'')$$

z čoho jasne vidíme, že $\beta(\theta)$ je striktne rastúca pre všetky θ' pre ktoré platí

$$0 < \alpha' = \beta(\theta') < 1.$$

Tým sme dokázali časť (ii) tejto Vety. Vieme teda, že $\beta(\theta)$ je neklesajúca, uvažovaný test spĺňa

$$E_\theta \phi(x) = \beta(\theta) \leq \beta(\theta_0) = E_{\theta_0}\phi(x) = \alpha \quad \text{pre } \theta \leq \theta_0. \tag{2.8}$$

Trieda testov spĺňajúcich (2.8) je obsiahnutá v triede spĺňajúcej $E_{\theta_0}(X) \leq \alpha$. Keďže uvažovaný test maximalizuje $\beta(\theta_1) = E_{\theta_1}\phi(x)$ vnútri tejto širšej triedy, zároveň tiež maximalizuje $\beta(\theta_1)$ pre triedu testov spĺňajúcu (2.8) a keďže to nezávisí na konkrétne zvolenej alternatíve θ_1, pre ktorú platí $\theta_1 > \theta_0$, je to UMP test H_0 proti H_1.

(iii) Dôkaz prevedieme analogicky ako v časti (i).

(iv) Uvažujme hypotézu $H_0 : \theta = \theta_0''$ pre $\theta_0'' < \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1''$ pre $\theta_1'' > \theta_0$. Keďže testujeme jednoduchú hypotézu proti jednoduchej alternatíve, aplikujeme na terajšiu situáciu Vetu 2.4. Z tej vieme, že existuje test tvaru:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & ak \quad p_{\theta_1''}(x) > kp_{\theta_0''}(x) \\ 0 & ak \quad p_{\theta_1''}(x) < kp_{\theta_0''}(x) \end{cases}, \tag{2.9}$$

Test by ale v tomto prípade vyzeral nasledovne:

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad p_{\theta_0''}(x) > k'p_{\theta_1''}(x), \\ 0 & \text{pre} \quad p_{\theta_0''}(x) < k'p_{\theta_1''}(x), \end{cases} \tag{2.10}$$

Vidíme, že test $\phi^*(x)$ minimalizuje silu testu H_0'' proti H_1'' z (2.3), minimalizuje chybu prvého druhu a teda minimalizuje $E_{\theta_0''} = \beta(\theta_0'')$ pre všetky $\theta_0'' < \theta_0$. □

Príklad 2.9 (Hypergeometrické rozdelenie)**.** Máme k dispozícii N kusov výrobkov, náhodne z nich vyberieme n kusov a skontrolujeme každý kus z tohto výberu. Ak celkový počet poškodených výrobkov zo všetkých výrobkov je D a X je počet poškodených výrobkov z výberu, potom X má *hypergeometrické* rozdelenie dané:

$$P\{X = x\} = P_D(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{D!}{(D-x)!x!} \frac{(N-D)!}{(N-D-n+x)!(n-x)!\frac{(N-n)!n!}{N!}},$$

pričom

$$\max(0, n + D - N) \leq x \leq \min(n, D).$$

Interpretujúc $P_D(x)$ ako hustotu vzhľadom k miere μ, ktorá priraďuje každej množine na reálnej priamke ako mieru počet prirodzených čísel 0,1,2 ... ktoré obsahuje a poznamenávajúc, že pre hodnoty x vnútri jej rozhrania platí:

$$\frac{P_{D+1}(x)}{P_D(x)} = \begin{cases} \frac{(D+1)(N-D-n+x)}{(N-D)(D+1-x)} & \text{ak} \quad n+D+1-N \leq x \leq D, \\ 0 & \text{ak} \quad x = n+D-N, \\ \infty & \text{ak} \quad x = D+1, \end{cases} \tag{2.11}$$

pretože

$$\frac{(D+1)!(N-D-1)!(D-x)!(N-D-n+x)!}{D!(N-D)!(D+1-x)!(N-D-1-n+x)!} = \frac{(D+1)(N-D-n+x)}{(N-D)(D+1-x)}$$

Upravíme ešte prvý výraz tak, že podelíme výrazy obsahujúce x:

$$\left(\frac{D+1}{N-D}\right)(N-n+1)\frac{1}{D+1-x},$$

stadiaľ vidíme, že podiel rozdelení spĺňa predpoklady monotónneho pomeru vierohodností pre $T(x) = x$, pretože výrazy v prvých dvoch zátvorkách sú konštantné a výraz v tretej zátvorke je rastúci pre $n+D+1-N \leq x \leq D$. Podľa Vety 2.8 teda existuje teda UMP test pre testovanie hypotézy $H_0 : D \leq D_0$ proti $D > D_0$, ktorý zamieta H_0, keď je X príliš veľké a analogicky existuje test pre testovanie $H_0' : D \geq D_0$.

2.3 Exponenciálny typ rozdelenia

Nech Θ je nejaká borelovská množina v R_k, ďalej nech miera $P_{\boldsymbol{\theta}}$ je absolútne spojitá vzhľadom k σ-konečnej miere μ a nech hustota $p_{\boldsymbol{\theta}} = \mathrm{d}P_{\boldsymbol{\theta}}/\mathrm{d}\mu$ má tvar

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = C(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum Q_j(\boldsymbol{\theta}) T_j(\boldsymbol{x})\right\} u(\boldsymbol{x}),$$

kde $C(\boldsymbol{\theta})$ a $Q_j(\boldsymbol{\theta})$ sú merateľné funkcie parametru $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)$ a $T_j(\boldsymbol{x})$ a $u(\boldsymbol{x})$ sú merateľné funkcie premennej $\boldsymbol{x}$. Potom hovoríme, že $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})$ je **hustota exponenciálneho typu**. Aby funkcia $p_{\boldsymbol{\theta}}$ bola hustotou pravdepodobnostnej miery, musí platiť $C(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ pre každé $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ a ďalej $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) \geq 0$ skoro všade vzhľadom k miere μ. Ak upravíme eventuálne $u(\boldsymbol{x})$ na množine miery nula, možno bez ujmy na obecnosti predpokladať, že $C(\boldsymbol{\theta}) > 0$ pre každé $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ a že $u(\boldsymbol{x}) \geq 0 \; \forall \, \boldsymbol{x} \in R_n$.

V špeciálnom prípade, kedy $\boldsymbol{\theta} = \theta$ je jednorozmerný parameter a Θ je borelovská podmnožina priamky, je hustota $p_\theta(\boldsymbol{x})$ tvaru

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = C(\theta) e^{Q(\theta)T(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x}).$$

Hovorí sa jej **jednoparametrická hustota exponenciálneho typu**.

Dôsledok 2.10. *Nech θ je reálny parameter a nech X má pravdepodobnostnú hustotu (vzhľadom k nejakej miere μ)*

$$p_\theta(x) = C(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x),$$

kde Q je rýdzomonotónna. Potom existuje UMP test ϕ pre test $H_0 : \theta \leq \theta_0$ proti $H_1 : \theta > \theta_0$.

Ak je Q rastúca,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pre} \quad T(x) > C, \\ \gamma & \textit{pre} \quad T(x) = C, \\ 0 & \textit{pre} \quad T(x) < C, \end{cases} \tag{2.12}$$

kde C a γ spĺňajú

$$E_{\theta_0}\phi(x) = \alpha. \tag{2.13}$$

Ak je Q klesajúca, nerovnosti platia obrátene.

Dôkaz. Ak ukážeme, že hustota $p_\theta(x)$ má monotónny pomer vierohodností v $T(x)$, zvyšok prvého tvrdenia plynie z Vety 2.8. Nech $\theta < \theta'$ a Q je rastúca. Potom

$$\frac{p'_\theta(x)}{p_\theta(x)} = \frac{C(\theta')e^{Q(\theta')T(x)}h(x)}{C(\theta)e^{Q(\theta)T(x)}h(x)} = \frac{C(\theta')}{C(\theta)}\frac{e^{Q(\theta')T(x)}}{e^{Q(\theta)T(x)}}\frac{h(x)}{h(x)} =$$

$$= \frac{C(\theta')}{C(\theta)}e^{T(x)(Q(\theta')-Q(\theta))}.$$

Stačí teda ukázať, že posledný výraz je rastúcou funkciou $T(x)$:

$$T(x) < T'(x)$$

$$0 < T'(x) - T(x)$$

$$0 < (T'(x) - T(x))(Q(\theta') - Q(\theta))$$

$$1 < e^{(T'(x)-T(x))(Q(\theta')-Q(\theta))}$$

$$e^{T(x)(Q(\theta')-Q(\theta))} < e^{T'(x)(Q(\theta')-Q(\theta))},$$

kde Q je rastúca a teda $Q(\theta')-Q(\theta) > 0$ pre $\theta' > \theta$. Podobne sa vyšetrí aj prípad, kedy Q je klesajúca a teda platí $-(Q(\theta') - Q(\theta)) > 0$ pre $\theta' > \theta$:

$$T(x) < T'(x)$$

$$0 < T'(x) - T(x)$$

$$0 < (T'(x) - T(x))(-1)(Q(\theta') - Q(\theta))$$

$$1 < e^{(T'(x)-T(x))(-1)(Q(\theta')-Q(\theta))}$$

$$e^{T(x)(-1)(Q(\theta')-Q(\theta))} < e^{T'(x)(-1)(Q(\theta')-Q(\theta))},$$

Druhá časť tvrdenia sa dokáže tiež pomocou Vety 2.8. Nech $p_{\theta_1}(x)$ a $p_{\theta_0}(x)$ sú hustoty pre θ_1, θ_0, $\theta_1 > \theta_0$. Jednoduchou úpravou zistíme, že vzťah

$$p_{\theta_1}(x) > kp_{\theta_0}(x)$$

a teda i vzťah $\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)}$ pre $\theta_1 > \theta_0$ platí práve vtedy, keď:

$$\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)} = \frac{C(\theta_1)}{C(\theta_0)} e^{T(x)(Q(\theta_1)-Q(\theta_0))} > k$$

$$e^{T(x)(Q(\theta_1)-Q(\theta_0))} > k\frac{C(\theta_0)}{C(\theta_1)}$$

$$T(x)(Q(\theta_1) - Q(\theta_0)) > \ln k\frac{C(\theta_0)}{C(\theta_1)}$$

a konečne

$$T(x) > \frac{1}{(Q(\theta_1) - Q(\theta_0))} \ln k\frac{C(\theta_0)}{C(\theta_1)} = C$$

a podobne dostaneme pre $p_{\theta_1}(x) = kp_{\theta_0}(x)$:

$$T(x) = \frac{1}{(Q(\theta_1) - Q(\theta_0))} \ln k\frac{C(\theta_0)}{C(\theta_1)} = C$$

a pre $p_{\theta_1}(x) < kp_{\theta_0}(x)$

$$T(x) < \frac{1}{(Q(\theta_1) - Q(\theta_0))} \ln k\frac{C(\theta_0)}{C(\theta_1)} = C$$

Teda sme podľa Vety 2.8 našli UMP test pre testovanie $H_0 : \theta_1 \leq \theta_0$ proti $H_1 : \theta_1 > \theta_0$, kde $\theta_1 > \theta_0$. Obdobne sa dokáže aj posledné tvrdenie. □

Príklad 2.11 (Ilustratívny)**.** Ak sledujeme v rovnakých časových úsekoch počet nejakých javov, napríklad počet telefonátov odchádzajúcich z kancelárie v päťminútových intervaloch, dostaneme náhodné veličiny s Poissonovým rozdelením. Uvažujme, že sme takýmto spôsobom získali nasledjúcu množinu hodnôt: 0.13, 0.10, 0.09, 0.11, 0.08, 0.12, 0.09, 0.10, 0.15, 0.9. Testujte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu $H_0 : \lambda \leq 0.1$ proti alternatíve $H_1 : \lambda > 0.1$.
Riešenie.

Máme teda náhodné veličiny $(X_1, \dots, X_{10})$ s Poissonovým rozdelením $\mathcal{P}o(\lambda)$, ktorého hustota má tvar:

$$\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

a ktorého stredná hodnota je rovná λ. Označme súčet týchto náhodných veličín Y, potom Y má rozdelenie $\mathcal{P}o(10\lambda)$, teda

$$\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{10} x_i} e^{-n\lambda}}{x_1! \dots x_{10}!}.$$

V našom prípade má Y rozdelenie $\mathcal{P}o(1)$, ktorá má hustotu $\frac{e^{-1}}{k!}$. Vidíme, že je to hustota exponenciálneho typu, pretože

$$\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{10} x_i} e^{-n\lambda}}{x_1! \dots x_{10}!} = \frac{e^{\log \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{10} x_i}} e^{-n\lambda}}{x_1! \dots x_{10}!} =$$

$$= \frac{e^{\sum_{i=1}^{10} x_i \log \lambda} e^{-n\lambda}}{x_1! \dots x_{10}!},$$

takže $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{10} x_i$ a $Q(\lambda) = \log \lambda$, kde $Q(\lambda)$ je rastúca. V tejto úlohe testujeme hypotézu

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \lambda > \lambda_0,$$

konkrétne pre $\lambda_0 = 0.1$. Podľa predchádzajúceho Dôsledku vieme, že existuje test tvaru (2.12), pričom je splnená podmienka (2.13).

$$P(Y = k) = \frac{(10\lambda_0)^k e^{-10\lambda_0}}{k!} = \frac{1^k e^{-1}}{k!}.$$

$$P(Y \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(Y = k) = 0,080,$$

$$P(Y \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = 0,019.$$

Vidíme, že hladinu významnosti $\alpha = 0.05$ by sme mohli dosiahnuť testom:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad Y > 3, \\ \gamma & \text{ak} \quad Y = 3, \\ 0 & \text{ak} \quad Y < 3. \end{cases} \tag{2.14}$$

Dourčíme ešte γ:

$$0.05 = 1 \cdot P(Y > 3) + \gamma \cdot P(Y = 3) + 0 = P(Y \geq 4) + \gamma \cdot P(Y = 3) =$$

$$= 0.019 + (0.080 - 0.019) \cdot \gamma = 0.19 + 0.061 \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.019}{0.061} = \frac{31}{61}.$$

Pre dáta, ktoré máme k dispozícii, dostávame:

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i = 1.87,$$

$$Y < 3,$$

teda na hladine 5% hypotézu H_0 nezamietame.

Príklad 2.12 (Ilustratívny). Firma vyrábajúca žiarovky sa rozhodla uviesť na trh nový typ žiarovky. Na obale chce uviesť informáciu, ako dlho by daná žiarovka mala za normálnych okolností svietiť. V laboratóriách testovali životnosť 10 žiaroviek a dostali takéto výsledky: 211, 208, 192, 195, 201, 203, 196, 194, 200, 197 (počet hodín, ktoré žiarovka svietila). Môžeme z týchto výsledkov vyvodiť záver, že dané žiarovky majú dobu životnosti minimálne 200 hodín?
Riešenie.

Doba životnosti výrobku má exponenciálne rozdelenie s hustotou

$$\lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0.$$

Stredná hodnota je rovná $\frac{1}{\lambda}$. Nech X_i je náhodná veličina popisujúca počet hodín, kedy bola žiarovka funkčná. Zjavne sú X_i nezávislé s hustotou

$$\lambda e^{-\lambda x_i}.$$

Potom združená hustota výberu $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ je

$$p_\lambda(x_1, \ldots, x_{10}) = \lambda^{10} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{10} x_i}.$$

Vidíme, daná hustota je hustotu exponenciálneho typu pre $T(x) = \sum_{i=1}^{10} x_i$ a $Q(\lambda) = -\lambda$. Chceme testovať, či stredná hodnota $EX_i = \frac{1}{\lambda} \geq 200$, čo odpovedá testovaniu hypotézy $H_0 : \lambda \leq \frac{1}{200} = \lambda_0$ proti alternatíve $H_1 : \lambda > \frac{1}{200} = \lambda_0$. Podľa Dôsledku 2.10 existuje UMP test tvaru (2.12) s obrátenými nerovnosťami (pretože $Q(\lambda)$ je klesajúca) spĺňajúci (2.13). UMP test v tomto prípade zamieta hypotézu pre príliš malé Y. Ďalej si všimneme, že náhodná veličina $2\lambda X_i$ má podľa Vety „o transformácii náhodných veličín"(viď [3], str.48, Veta 3.5) hustotu $\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}$, kde $u \geq 0$, čo je zároveň hustota χ^2-rozdelenia o 2 stupňoch voľnosti. Potom $2\lambda Y$ má podľa Vety 4.14 (viď [3], str. 68) rozdelenie χ^2 o $2 \cdot 10 = 20$ stupňoch voľnosti. Keďže testujeme na hladine $\alpha = 0.05$, dostávame, že pre kritický obor musí platiť:

$$2\lambda_0 Y \leq 31.415,$$

$$Y \leq \frac{1}{2\lambda_0} 31.415,$$

$$Y \leq 3141.5,$$

kde 3141.5=C pre test tvaru (2.12) (s obrátenými nerovnosťami). V našom prípade $Y = 1997$, takže hypotézu, že životnosť žiarovky bude minimálne 200 hodín, zamietame na hladine 5%.

2.4 Hranice spoľahlivosti

Teória týkajúca sa UMP jednostranných testov sa môže aplikovať na problém odhadovania dolnej a hornej hranice pre reálny parameter θ. Problém určenia dolnej hranice sa vynára napríklad v prípade, keď θ predstavuje hranicu lámavosti novej zliatiny, alebo určenia hornej hranice, keď θ je jedovatosť lieku alebo inak pravdepodobnosť, že nastane nežiaduci účinok. Diskusia tohto problému je paralalelná pre obe hranice, postačujúce preto pre nás bude uvažovať iba dolnú hranicu, označme ju $\underline{\theta}$. Keďže $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X)$ bude funkciou pozorovaní, nemôžeme požadovať pokles pod θ s určitosťou, ale iba so špeciálnou hodnotou pravdepodobnosti. Volí sa číslo $1-\alpha$, hladina spoľahlivosti, a ohraničuje pozornosť na hranice $\underline{\theta}$ spĺňajúce

$$P_\theta\{\underline{\theta}(X) \leq \theta\} \geq 1-\alpha \quad \forall \quad \theta. \tag{2.15}$$

Definícia 2.13 (Hranica spoľahlivosti, koeficient spoľahlivosti)**.** Funkcia $\underline{\theta}$ sa nazýva **hranica spoľahlivosti** pre θ na hladine spoľahlivosti $1-\alpha$. Infímum ľavej strany výrazu (2.15) sa nazýva **koeficient spoľahlivosti** pre $\underline{\theta}$.

Definícia 2.14 (Rovnomerne najpresnejšia dolná hranica)**.** Funkcia $\underline{\theta}$, pre ktorú

$$P_\theta\{\underline{\theta}(X) \leq \theta'\} = \text{minimum} \quad \text{pre všetky} \quad \theta' < \theta \tag{2.16}$$

vzhľadom k (2.15), je **rovnomerne najpresnejšia dolná hranica spoľahlivosti** pre θ na hladine spoľahlivosti $1-\alpha$.

Definícia 2.15 (Konfidenčné množiny)**.** Podmnožiny $S(X)$ parametrického priestoru Θ vytvárajú **konfidenčnú množinu** na hladine spoľahlivosti $1-\alpha$, ak platí

$$P_\theta\{\theta \in S(X)\} \geq 1-\alpha \quad \forall \theta \in \Theta, \tag{2.17}$$

čo znamená, že náhodná množina $S(X)$ pokrýva hodnotu skutočného parametru s pravdepodobnosťou $1-\alpha$.

Dolná hranica spoľahlivosti odpovedá špeciálnemu prípadu, keď S(X) je jednostranný interval

$$S(X) = \{\theta : \underline{\theta}(x) \leq \theta < \infty\}.$$

Veta 2.16. *(i) Pre každé $\theta_0 \in \Theta$ nech $A(\theta_0)$ je obor prijatia testu s veľkosťou α pre testovanie $H_0(\theta_0) : \theta = \theta_0$ a pre každý bod x výberového priestoru $\mathcal{X}$ nech $S(x)$ je množina hodnôt parametrov*

$$S(x) = \{\theta : x \in A(\theta_0), \theta \in \Theta\}.$$

Potom $S(x)$ je konfidenčná množina s koeficientom spoľahlivosti $1-\alpha$, teda $P_\theta\{\theta \in S(x)\} = 1-\alpha$.

(ii) Ak pre všetky θ_0 je $A(\theta_0)$ UMP test pre testovanie $H_0(\theta_0)$ na hladine α proti alternatívam $H_1(\theta_0)$, potom pre každé θ_0 z Θ $S(X)$ minimalizuje pravdepodobnosť

$$P_\theta\{\theta_0 \in S(X)\} \quad \forall\ \theta \in H_1(\theta_0)$$

medzi všetkými konfidenčnými množinami pre θ s hladinou spoľahlivosti $1-\alpha$. (Hovoríme, že $S(X)$ je rovnomerne najpresnejšia medzi všetkými konfidenčnými množinami s koeficientom spoľahlivosti $1-\alpha$ pre θ.)

Dôkaz. (i) Z definície množiny $S(X)$ vidíme, že

$$\theta \in S(x) \text{ práve vtedy, keď } x \in A(\theta)$$

a odtiaľ dostávame

$$P_\theta\{\theta \in S(X)\} = P_\theta\{X \in A(\theta)\} \geq 1 - \alpha,$$

teda $S(x)$ je konfidenčná množina s hladinou spoľahlivosti $1 - \alpha$.

(ii) Nech $S^*(x)$ je iná konfidenčná množina na hladine $1 - \alpha$ a ak

$$A^*(\theta_0) = \{x : \theta \in S^*(\theta)\},$$

potom

$$\theta \in S^*(x) \text{ práve vtedy, keď } x \in A^*(\theta)$$

a teda

$$P_\theta\{X \in A^*(\theta)\} = P_\theta\{\theta \in S^*(X)\} \geq 1 - \alpha,$$

takže $A^*(\theta_0)$ je obor prijatia α-testu pre $H_0(\theta_0)$. Keďže $A(\theta_0)$ je UMP α-test pre $H(\theta_0)$, vyplýva z toho, že pre akékoľvek $\theta \in H_1(\theta_0)$ platí

$$P_\theta\{X \in A^*(\theta_0)\} \geq P_\theta\{X \in A(\theta_0)\}$$

a odtiaľ dostávame

$$P_\theta\{X \in A^*(\theta_0)\} = P_\theta\{\theta_0 \in S^*(X)\} \geq P_\theta\{X \in A(\theta_0)\} = P_\theta\{\theta_0 \in S(X)\},$$

teda

$$P_\theta\{\theta_0 \in S^*(X)\} \geq P_\theta\{\theta_0 \in S(X)\}$$

a vidíme, že $S(X)$ minimalizuje $P_\theta\{\theta_0 \in S(X)\}$ pre každé θ_0. □

Dôsledok 2.17. *Nech hustoty $p_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$, majú monotónny pomer vierohodností v $T(x)$ a predpokladajme, že narastajúca distribučná funkcia $F_\theta(t)$ pre $T = T(X)$ je spojitá funkcia premenných t a θ, keď všetko ostatné bude pevné.*

(i) Existuje stejnomerne najpresnejšia hranica spoľahlivosti $\underline{\theta}$ pre θ na každej hladine spoľahlivosti $1 - \alpha$.

(ii) Ak x predstavuje pozorované hodnoty X, $t = T(x)$ a ak rovnosť

$$F_\theta(t) = 1 - \alpha \tag{2.18}$$

má riešenie $\theta = \hat{\theta} \in \Theta$, potom toto riešenie je jediné a $\underline{\theta}(x) = \hat{\theta}$.

Dôkaz. Viď [2], str. 92, Corollary 3. □

Nech $\underline{\theta}$ a $\overline{\theta}$ sú dolná a horná hranica pre θ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha_1$ a $1 - \alpha_2$ a uvažujme $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ pre všetky x. Toto bude prípad za predpokladov Dôsledku 2.17 ak $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Definícia 2.18 (Intervaly spoľahlivosti)**.** Intervaly $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ nazývame **intervalmi spoľahlivosti** pre θ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha_1 - \alpha_2$, čo znamená, že obsahujú skutočnú hodnotu parametru s pravdepodobnosťou $1 - \alpha_1 - \alpha_2$, keďže

$$P_\theta\{\underline{\theta} \leq \theta \leq \overline{\theta}\} = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad \forall \quad \theta.$$

2.5 Zobecnenie Neymann-Pearsonovej lemmy

Veta 2.19. *Nech $f_1, \ldots, f_{m+1}$ sú reálne funkcie definované na Euklidovskom priestore $\mathcal{X}$ a integrovateľnej μ a uvažujme, že pre dané konštanty $c_1, \ldots, c_m$ existuje kritická funkcia ϕ spĺňajúca*

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_i(x) \mathrm{d}\mu(x) = c_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.19}$$

Nech $\mathcal{C}$ je trieda kritických funkcií ϕ, pre ktoré platí (2.19).

(i) Medzi všetkými prvkami $\mathcal{C}$ existuje jeden, ktorý maximalizuje

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_{m+1}(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

(ii) Postačujúca podmienka, aby prvok z $\mathcal{C}$ maximalizoval

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_{m+1}(x) \mathrm{d}\mu(x),$$

je existencia konštánt $k_1, \ldots, k_m$ takých, že

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 1 \quad \text{ak } f_{m+1}(x) > \textstyle\sum_{i=1}^m k_i f_i(x), \\ \phi(x) &= 0 \quad \text{ak } f_{m+1}(x) < \textstyle\sum_{i=1}^m k_i f_i(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

(iii) Ak prvok z $\mathcal{C}$ spĺňa (2.20) *pre $k_1, \ldots, k_m \geq 0$, potom maximalizuje*

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_{m+1}(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

spomedzi všetkých kritických funkcií spĺňajúcich

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_i(x) \mathrm{d}\mu(x) \leq c_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.21}$$

(iv) Množina M bodov v m-rozmernom priestore, ktorých súradnice sú

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_1(x) \mathrm{d}\mu(x), \ldots, \int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_m(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

pre nejakú kritickú funkciu ϕ, je konvexná a uzavretá. Ak $(c_1, \ldots, c_m)$ je vnútorný bod množiny M, potom existujú konštanty $k_1, \ldots, k_m$ a test ϕ spĺňajúci (2.19) *a* (2.20) *a nutná podmienka, aby prvok z $\mathcal{C}$ maximalizoval*

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) f_{m+1}(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

je, aby (2.21) *platilo sk.vš.* $[\mu]$.

Dôkaz. Viď [2], str.97. □

2.6 Obojstranné hypotézy

UMP test existuje nielen pre jednostranné hypotézy, ale aj pre určité obojstranné hypotézy v tvare

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ alebo } \theta \geq \theta_2 \quad (\theta_1 < \theta_2).$$

Takéto problémy pri testovaní nastanú, ak si napríklad želáme ohraničiť či sa zohľadnili dané špecifikácie týkajúce sa napríklad danej zložky lieku, alebo či nejaký nástroj na určovanie dĺžky, váhy, je správne vyvážený. Potom sa zostaví hypotéza, že θ neleží medzi požadovanými hranicami, takže chyba prvého druhu pozostáva z toho, že θ prehlásime za vyhovujúce, keď v podstate nie je. Rozhodnutie, či prijať H_0, bude typicky sprevádzané tvrdením, či predpokladáme, že θ je $\leq \theta_1$ alebo $\geq \theta_2$.

Veta 2.20. *Pre testovanie hypotéz $H_0 : \theta \leq \theta_1$ alebo $\theta \geq \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ proti alternatívam $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ pre jednoparametrické rozdelenie exponenciálneho typu existuje UMP test daný*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{ak} \quad C_1 < T(x) < C_2, \\ \gamma_i & \textit{ak} \quad T(x) = C_i, \quad i = 1, 2, \\ 0 & \textit{pre} \quad T(x) < C_1 \textit{ alebo } T(x) > C_2, \end{cases} \tag{2.22}$$

kde C_1, C_2 a γ_1, γ_2 spĺňajú

$$E_{\theta_1}\phi(X) = E_{\theta_2}\phi(X) = \alpha. \tag{2.23}$$

(ii) Tento test minimalizuje $E_\theta\phi(X)$ vzhľadom k (2.23) pre všetky $\theta < \theta_1$ a $> \theta_2$.

Dôkaz. Nech $\theta_0 < \theta' < \theta_1$, $T = T(X)$ je suficientná štatistika (viď Definícia 2.24), ktorej rozdelenie má tvar

$$dP_\theta(t) = C(\theta)e^{Q(\theta)t}\mathrm{d}\nu(t),$$

kde o $Q(\theta)$ predpokladáme, že je rastúca. Uvažujme najskôr problém maximalizovania $E_{\theta'}(T)$ vzhľadom k (2.23) pre $\phi(x) = \psi[T(x)]$. Nech M označuje množinu všetkých bodov $(E_{\theta_0}\psi(T), E_{\theta_1}\psi(T))$, kde ψ prechádza množinu všetkých kritických funkcií. Potom z Dôsledku 2.5 vieme, že množina M obsahuje body (α, u_0) a (α, u_1), pre ktoré platí $u_0 < \alpha < u_1$, a tiež body (u, u), pre ktoré platí $0 < u < 1$. Z toho dostávame, že bod (α, α) je vnútorným bodom množiny M. Ďalej z časti (iv) Vety 2.19 existujú konštanty k_0, k_1 a test $\psi_0(t)$, že $\phi_0(x) = \psi_0[T(x)]$ spĺňa (2.23) a

$$\begin{array}{lll} \psi_0(t) = 1 & \text{ak} & C(\theta')e^{Q(\theta')t} > k_0 C(\theta_0)e^{Q(\theta_0)t} + k_1 C(\theta_1)e^{Q(\theta_1)t} \\ & \text{teda ak} & 1 > k_0\frac{C(\theta_0)}{C(\theta')}e^{(Q(\theta_0)-Q(\theta'))t} + k_1\frac{C(\theta_1)}{C(\theta')}e^{(Q(\theta_1)-Q(\theta'))t} \\ & & 1 > a_0 e^{b_0 t} + a_1 e^{b_1 t} \quad (b_0 < 0 < b_1) \\ & & \\ \psi(t) = 0 & \text{ak} & C(\theta')e^{Q(\theta')t} < k_0 C(\theta_0)e^{Q(\theta_0)t} + k_1 C(\theta_1)e^{Q(\theta_1)t} \\ & & 1 < a_0 e^{b_0 t} + a_1 e^{b_1 t} \quad (b_0 < 0 < b_1) \end{array}$$

a_1, a_2 nemôžu byť obe ≤ 0, pretože test by stále zamietal. Ak jedno z nich je ≤ 0 a druhé je > 0, potom ľavá strana je rýdzomonotónna a test je z typu jednostranného testu uvažovaného v Dôsledku 2.10, ktorý má rýdzomonotónnu silofunkciu a preto nemôže splniť (2.23). Zostala jediná možnosť, že obe a_1 i a_2 sú kladné. Preto test spĺňa (2.22). Z Lemmy 4 (viď [2], str. 103) vyplýva, že C_1, C_2, γ_1, γ_2 sú jednoznačne určené (2.22) a (2.23) a z Vety 2.19 (iii) vyplýva, že test je UMP vzhľadom k slabšiemu obmedzeniu $E_{\theta_i}\psi(T) \leq \alpha$ (i=1,2). Na dokončenie dôkazu, že tento test je UMP pre testovanie H_0, je potrebné ukázať, že spĺňa $E_\theta\psi(T) \leq \alpha$ pre $\theta \leq \theta_1$ a $\theta \geq \theta_2$. To vyplýva z (ii) porovnaním s testom $\psi(t) = \alpha$.

(ii) Nech $\theta' < \theta_1$ a aplikujme Vetu 2.19 (iv), aby sme minimalizovali $E_{\theta'}\phi(X)$ vzhľadom k (2.23). Predelením výrazom $e^{Q(\theta_1)t}$ vidíme, že požadovaný test má kritický obor tvaru

$$1 > a_0 e^{b_0 t} + a_1 e^{b_1 t} \quad (b_0 < 0 < b_1).$$

Zhoduje sa teda s testom $\psi_0(t)$ získaným v (i). Podľa Vety 2.19 (iv) sú prvá a tretia podmienka z (2.22) tiež potrebné a optimálny test je preto jediný za podmienky $P\{T = C_i\} = 0$. □

2.7 Najmenej priaznivé rozdelenia

Dôsledkom Vety 2.4 je, že vždy existuje najsilnejší test pre testovanie jednoduchej hypotézy proti jednoduchej alternatíve. Pozrime sa na obecnejšiu situáciu: uvažujme euklidovský výberový priestor, pravdepodobnostné hustoty $f(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$, g vzhľadom k miere μ a testovanie $H_0 : f(\theta), \theta \in \Theta_0$ proti jednoduchej alternatíve $H_1 : g$. Našou snahou je redukovať zloženú hypotézu na jednoduchú. Toho sa dosiahne uvažovaním vážených priemerov rozdelení v H_0. Zložená hypotéza H_0 je nahradená jednoduchou hypotézou H_Λ:

pravdepodobnostná hustota náhodnej veličiny X je daná

$$h_\Lambda = \int_{\Theta_0} f_\theta(x) \mathrm{d}\Lambda(\theta),$$

kde Λ je pravdepodobnostné rozdelenie nad Θ_0. Problematika nájdenia vhodného Λ sa často zľahčí nasledujúcou úvahou. Keďže H_0 neposkytuje žiadnu informáciu týkajúcu sa θ a keďže H_Λ je ekvivalentné s H_0 za účelom testovania proti g, to, že budeme poznať rozdelenie Λ, nám môže poskytnúť aspoň malú pomoc pri riešení úlohy. Upresneníme to teda: predpokladajme, že θ má rozdelenie Λ. Potom maximálna sila β_Λ, ktorá môže byť dosiahnutá proti g, je sila najsilnejšieho testu ϕ_Λ pre testovanie H_Λ proti $H_1 : g$.

Definícia 2.21 (Najmenej priaznivé rozdelenie)**.** Hovoríme, že Λ je **najmenej priaznivé rozdelenie** (na hladine α), ak pre všetky Λ' platí nerovnosť

$$\beta_\Lambda \leq \beta_{\Lambda'}.$$

Veta 2.22. *Nech existuje rozdelenie* Λ *na* Θ_0*, že najsilnejší* α*-test* ϕ_Λ *hypotézy* H_Λ *proti* H_1 *je zároveň testom veľkosti* $\leq \alpha$ *pre pôvodnú hypotézu* $H : \theta \in \Theta_0$*. Potom:*

(i) *test* ϕ_Λ *je najsilnejší* α*-test pre* H *proti* H_1*,*

(ii) *ak* ϕ_Λ *je jediný najsilnejší* α*-test pre* H_Λ *proti* H_1*, potom je i jediným najsilnejším testom pre testovanie* H *proti* H_1*,*

(iii) *Rozdelenie* Λ *je najmenej priaznivé rozdelenie.*

Dôkaz. Poznamenajme najprv, že h_Λ je opäť hustota vzhľadom k miere μ, pretože podľa Fubiniho vety (viď [2], str.40, Theorem 3) platí

$$\int_{\mathcal{X}} h_\Lambda(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta_0} f_\theta(x)\mathrm{d}\Lambda(\theta)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\int_{\Theta_0} \mathrm{d}\Lambda(\theta)\int_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Theta_0} \mathrm{d}\Lambda(\theta) = 1.$$

(i),(ii) Uvažujme, že ϕ_Λ je α-test pre testovanie H_0 a nech ϕ^* je iný α-test. Keďže

$$E_\theta\phi^*(X) \leq \alpha \text{ pre všetky } \theta \in \Theta_0,$$

dostávame

$$\int_{\mathcal{X}} \phi^*(x)h_\Lambda(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \phi^*(x)\int_{\Theta_0} f_\theta(x)\mathrm{d}\Lambda(\theta)\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{\Theta_0}\int_{\mathcal{X}} \phi^*(x)f_\theta(x)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\Lambda(\theta) = \int_{\Theta_0} E_\theta\phi^*(X)\mathrm{d}\Lambda(\theta) \leq \alpha,$$

kde prvý výraz zľava môžeme označiť ako $E_{\theta,\Lambda}\phi^*(x)$ a dostávame

$$E_{\theta,\Lambda}\phi^*(x) \leq \alpha,$$

takže ϕ^* je zároveň aj α-test pre testovanie H_Λ a jeho sila nesmie presiahnuť silu testu ϕ, pretože ten je podľa predpokladov vety najsilnejším testom pre H_Λ proti g. Ale keďže ϕ^* bol pôvodne test H_0 proti g, plynie z toho, že test ϕ je najsilnejším α-testom pre H_0 proti g. Zo záverov vyvodených na základe predošlých úvah vidíme, že platí i tvrdenie (ii).

(iii) Nech Λ' je iné pravdepodobnostné rozdelenie. Označme jeho hustotu

$$h_{\Lambda'} = \int_{\Theta_0} f_\theta(x)\mathrm{d}\Lambda'(\theta).$$

V tomto prípade teda budeme testovať $H_{\Lambda'} : h_{\Lambda'}$ proti $H_1 : g$, ďalej pre toto testovanie nájdeme najsilnejší α-test; označíme ho $\phi_{\Lambda'}$. V tomto prípade teda sila testu ϕ_Λ nesmie prekročiť silu testu $\phi_{\Lambda'}$. Ak označíme silu testu $\phi_{\Lambda'}$ ako $\beta_{\Lambda'}$ a silu testu ϕ_Λ ako β_Λ, na základe poslednej myšlienky dostávame:

$$\beta_\Lambda \leq \beta_{\Lambda'},$$

takže Λ je najmenej priaznivé rozdelenie. $\square$

Podmienky tejto vety môžu byť podané inou formou, keď poznamenáme, že ϕ_Λ môže spĺňať $\int_{\Theta_0} E_\theta\phi_\Lambda(X)\mathrm{d}\Lambda(\theta) = \alpha$ a $E_\theta\phi_\Lambda(X) \leq \alpha$ pre všetky $\theta \in \Theta_0$ iba v prípade, že množina prvkov θ s $E_\theta\phi_\Lambda(X) = \alpha$ má Λ-mieru rovnú 1.

Dôsledok 2.23. *Uvažujme, že Λ je pravdepodobnostná hustota na Θ_0 a že ${\Theta_0}'$ je podmnožina Θ_0 s $\Lambda({\Theta_0}') = 1$. Nech ϕ_Λ je test tvaru*

$$\phi_\Lambda(x) = \begin{cases} 1 & ak \quad g(x) > k \int\limits_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\mathrm{d}\Lambda(\theta), \\ \\ 0 & ak \quad g(x) < k \int\limits_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\mathrm{d}\Lambda(\theta). \end{cases} \tag{2.24}$$

Potom ϕ_Λ je najsilnejší α-test pre testovanie H_0 proti g za podmienky (predpokladu)

$$E_{\theta'}\phi_\Lambda(X) = \sup_{\theta\in\Theta_0} E_\theta\phi_\Lambda(X) = \alpha \quad \text{pre} \quad \theta' \in {\Theta_0}'. \tag{2.25}$$

2.8 Testovanie strednej hodnoty a rozptylu normálneho rozdelenia

Definícia 2.24 (Suficientná štatistika)**.** Štatistika $\boldsymbol{S}$ sa nazýva **suficientná** (postačujúca) pre parameter $\boldsymbol{\theta}$, ak podmienené rozdelenie vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ pri danom $\boldsymbol{S}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.

Voľne povedané to znamená, že suficientná štatistika vyčerpáva všetku informáciu o parametri $\boldsymbol{\theta}$, ktorá je vo vektore $\boldsymbol{X}$ obsiahnutá.

Definícia 2.25 (Ancilárna štatistika)**.** Nech náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ má hustotu $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ vzhľadom k σ-konečnej miere μ. Štatistika $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ sa nazýva **ancilárna** pre parameter $\boldsymbol{\theta}$, ak jej rozdelenie nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.

Problém testovania strednej hodnoty μ a rozptylu σ^2 normálneho rozdelenia je mimoriadne dôležitý, kvôli ich širokému využitiu. Teraz (ako aj v podobných prípadoch, ktoré budeme rozoberať neskôr) sa o parameteri, ktorý netestujeme, predpokladá, že je neznámy a nebude sa vystupovať v hypotéze. Môžeme písať, napríklad,

$$\sigma \leq \sigma_0$$

namiesto úplnejšieho zápisu

$$\sigma \leq \sigma_0, -\infty < \mu < \infty.$$

Štandardné testy (pomerom vierohodností) dvoch hypotéz

$$\sigma \leq \sigma_0 \quad \text{a} \quad \mu \leq \mu_0$$

sú dané kritickými obormi

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \geq C \tag{2.26}$$

a

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \geq C. \tag{2.27}$$

Odpovedajúce testy sa pre hypotézy $\sigma \geq \sigma_0$ a $\mu \geq \mu_0$ dostaneme z kritických oborov (2.26) a (2.27) obrátením nerovností.

Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber o rozsahu n pre $(n > 3)$ z $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a uvažujme najskôr hypotézy $H_0^1 : \sigma \geq \sigma_0$ a $H_0^2 : \sigma \leq \sigma_0$ a jednoduchú alternatívu $H_1 : \mu = \mu_1, \quad \sigma = \sigma_1$. Zdá sa byť rozumné predpokladať, že najmenej priaznivé rozdelenie Λ v rovine určenej μ, σ, μ je os x, σ je os y, je koncentrované na priamke $\sigma = \sigma_0$. Označme $Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \overline{X}$ a $U = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, sú to suficientné štatistiky pre parametre (μ, σ) a zameriame na ne svoju pozornosť. Štatistika $Y = \overline{X}$ má rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, pretože

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} nEX_i = \frac{1}{n}n \cdot \mu = \mu,$$

pretože $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé a rovnako rozdelené. Spočítame ešte rozptyl:

$$\mathrm{var}\overline{X} = \frac{1}{n^2}\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) + \sum\sum\nolimits_{i \neq j}\mathrm{cov}(X_i, X_j)) =$$

$$= \frac{1}{n^2}n \cdot \mathrm{var}X_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Štatistika $U^* = \frac{U}{\sigma^2}$ má rozdelenie χ^2_{n-1}, pretože

$$U^* = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$$

je súčet druhých mocnín náhodných veličín, ktoré sú nezávislé a každá z nich má rozdelenie $\mathcal{N}(0, 1)$. Ich združená hustota za platnosti H_Λ je

$$C_0 u^{\frac{(n-3)}{2}} \exp\left(\frac{u}{2{\sigma_0}^2}\right) \int_{\mathcal{X}} \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_0}^2}(y-\mu)^2\right] \mathrm{d}\Lambda(\mu),$$

zatiaľ čo za platnosti H_1 dostávame

$$C_1 u^{\frac{(n-3)}{2}} \exp\left(\frac{u}{2{\sigma_1}^2}\right) \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_1}^2}(y-\mu)^2\right].$$

Vidíme, že voľba Λ by mala ovplyvňovať iba rozdelenie Y. Najmenej priaznivé rozdelenie Λ by preto malo mať vlastnosť, že hustota náhodnej veličiny Y za platnosti H_Λ,

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi{\sigma_0}^2}} \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_0}^2}(y-\mu)^2\right] \mathrm{d}\Lambda(\mu),$$

sa približuje, ako sa len dá, k hustote za platnosti alternatívy

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi{\sigma_1}^2}} \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_1}^2}(y-\mu)^2\right] \mathrm{d}\Lambda(\mu).$$

Od tohto bodu už musíme rozlišovať, či pracujeme s hypotézou H_0^1 alebo s hypotézou H_0^2. V prvom prípade uvažujme $\sigma_1 < \sigma_0$. Vhodnou voľbou Λ môžeme dosiahnuť, že sa stredná hodnota Y bude rovnať μ_1, ale rozptyl, ak sa čokoľvek zvýši, presiahne jeho počiatočnú hodnotu ${\sigma_0}^2$. To ponúka možnosť, že najmenej priaznivé rozdelenie pridelí pravdepodobnosť 1 bodu $\mu = \mu_1$, pretože v takomto prípade je rozdelenie Y za platnosti hypotézy aj alternatívy normálne s rovnakou strednou hodnotou v oboch prípadoch a najmenším možným rozdielom medzi rozptylmi.

Situácia je odlišná v prípade H_0^2, pre ktorú máme $\sigma_0 < \sigma_1$. Ak najmenej priaznivé rozdelenie Λ má hustotu, označme ju λ, potom hustota Y za platnosti H_Λ bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi{\sigma_0}^2}} \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_0}^2}(y-\mu)^2\lambda(\mu)\right] \mathrm{d}\mu.$$

Toto je pravdepodobnostná hustota súčtu dvoch nezávislých náhodných veličín, jednej s rozdelením $\mathcal{N}(0, \frac{{\sigma_0}^2}{n})$ a druhej s hustotou $\lambda(\mu)$. Ak Λ berieme ako rozdelenie $\mathcal{N}(\mu_1, \frac{({\sigma_1}^2-{\sigma_0}^2)}{n})$, rozdelenie Y za platnosti H_Λ bude $\mathcal{N}(\mu_1, \frac{{\sigma_1}^2}{n})$, teda rovnaké ako za platnosti H_1.

Aplikujeme teraz Dôsledok 2.23. Pre H_0^1 výhodnejšie pracovať s pôvodnými náhodnými veličinami než s Y a U. Substitúciou v (2.24) bude $\phi(x) = 1$ vtedy, keď

$$\frac{1}{(2\pi{\sigma_1}^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2{\sigma_1}^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right] > C\frac{1}{(2\pi{\sigma_0}^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right]$$

$$\frac{(2\pi{\sigma_1}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2{\sigma_1}^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right]}{(2\pi{\sigma_0}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right]} > C,$$

čo platí pre kritický obor

$$\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2 \leq C. \tag{2.28}$$

Aby sme mohli uznať voľbu Λ, musíme ukázať, že

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2 \leq C \middle| \mu,\sigma\right\}$$

nadobúda maximum na polrovine $\sigma \geq \sigma_0$ v bode $\mu = \mu_1$, $\sigma = \sigma_0$. Pre každé pevné σ výraz uvedený vyššie predstavuje pravdepodobnosť, že prvok náhodného výberu padne do gule s pevným polomerom a stredom μ_1, vypočítanú za predpokladu, že X_i sú nezávislé náhodné veličiny s rozdelením $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. Táto pravdepodobnosť je maximálna, keď stred gule sa zhoduje so stredom rozdelenia; teda táto pravdepodobnosť bude pre každé pevné σ maximálna, keď $\mu = \mu_1$. Môžeme ju potom prepísať do tvaru

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2 \leq \frac{C}{\sigma^2} \middle| \mu_1,\sigma\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} {V_i}^2 \leq \frac{C}{\sigma^2}\right\}, \tag{2.29}$$

kde $V_1,\dots,V_n$ sú nezávislé s rozdelením $\mathcal{N}(0,1)$, pretože

$$EV_i = \frac{1}{\sigma}(EX_i-\mu_1) = 0$$

a

$$\mathrm{var}V_i = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{var}(X_i-\mu_1) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1.$$

Vidíme, že V_i je klesajúca funkcia pre σ^2, $\sigma \geq \sigma_0$, maximum teda nadobudne v bode $\sigma = \sigma_0$.

V prípade hypotézy H_0^2 aplikáciou Dôsledku 2.23 na suficientné štatistiky (Y,U) získame $\phi_\Lambda(y,u) = 1$ ak

$$\frac{C_1 u^{\frac{(n-3)}{2}} \exp\left(\frac{u}{2{\sigma_1}^2}\right) \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_1}^2}(y-\mu)^2\right]}{C_0 u^{\frac{(n-3)}{2}} \exp\left(\frac{u}{2{\sigma_0}^2}\right) \int_{\mathcal{X}} \exp\left[-\frac{n}{2{\sigma_0}^2}(y-\mu)^2\right] \lambda(\mu)\mathrm{d}\mu} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{u}{{\sigma_1}^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{u}{2{\sigma_1}^2}}}{\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(\frac{u}{{\sigma_0}^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{u}{2{\sigma_0}^2}}} = C' \exp\left[-\frac{u}{2}\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)\right] \geq k,$$

$$\exp\left[-\frac{u}{2}\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right)\right] \geq \frac{k}{C'}$$

$$-\frac{u}{2}\left(\frac{1}{{\sigma_1}^2}-\frac{1}{{\sigma_0}^2}\right) \geq \log\frac{k}{C'}$$

$$u \geq \frac{\log\frac{k}{C'}}{\left(\frac{1}{{\sigma_0}^2}-\frac{1}{{\sigma_1}^2}\right)} = C$$

čo nastane, ak

$$u = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \geq C. \tag{2.30}$$

Keďže rozdelenie $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ nezávisí na μ ani na σ, pravdepodobnosť $P\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \geq C|\mu, \sigma\}$ nezávisí na μ a rastie spolu so σ, takže podmienky Dôsledku 2.23 sú splnené. Keďže test (2.30) nezávisí na μ_1 a ani na σ_1, je UMP testom pre testovanie $\sigma \leq \sigma_0$ proti $\sigma > \sigma_0$. Tiež vidíme, že sa zhoduje s testom pomerom vierohodností (2.26). Na druhej strane, najsilnejší test (2.28) pre testovanie $\sigma \geq \sigma_0$ proti $\sigma < \sigma_0$ závisí na hodnote μ_1 za platnosti hypotézy, pre tento prípad teda UMP test neexistuje.

Odpovedajúce odvodenie pre hypotézu $H_0^2 : \mu \leq \mu_0$ je menej zrejmé. Ukáže sa, že Studentov test daný (2.27) je najsilnejší, ak hladina významnosti α je $\geq \frac{1}{2}$, nezávisle na alternatíve $\mu_1 > \mu_0$, σ_1. Tento test je preto UMP pre $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Na druhej strane, keď $\alpha < \frac{1}{2}$, najsilnejší test pre H_0^2 zamieta, ak $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \leq b$, kde konštanty a a b závisia na alternatíve (μ_1, σ_1) a na α. Teda pre tie hladiny významnosti, ktoré nás zaujímajú, UMP test pre H_0^2 neexistuje. Žiadny nový problém nenastáva pre hypotézu $\mu \geq \mu_0$, pretože ho prevedieme na práve dodiskutovaný prípad transformáciou $Y_i = \mu_0 - (X_i - \mu_0)$.

Príklad 2.26 (Ilustratívny)**.** Dôležitou otázkou v dnešnej dobe je otázka ochrany životného prostredia. Týka sa to aj pohonných hmôt, konkrétne nafty, do ktorej sa musí primiešavať 5% bionafty. Z 10 nádrží bolo postupne odobratých 10 litrov nafty (z každej nádrže jeden liter) a určilo sa, koľko percent bionafty obsahuje každá z tých vzoriek. Tu sú výsledky:

$$5.266, 6.439, 4.435, 5.204, 4.676, 5.225, 5.131, 5.553, 4.617, 3.560.$$

Za predpokladu, že stredná hodnota je známa, testujte na hladine 5%:

a) $H_0 : \sigma \leq 0.5$ proti $H_1 : \sigma > 0.5$

b) $H_0 : \sigma \leq 0.8$ proti $H_1 : \sigma > 0.8$

Riešenie.

a) Testom sme overili, že dáta môžeme považovať za pochádzajúce z normálneho rozdelenia. Ďalej poznáme strednú hodnotu. S použitím teórie uvedenej vyššie vieme, že $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \geq C$ je UMP testom pre testovanie $\sigma \leq \sigma_0$ proti $\sigma > \sigma_0$. Vieme, že $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{{\sigma_0}^2}$ má rozdelenie χ^2 o n stupňoch voľnosti. Dostávame teda $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{{\sigma_0}^2} \geq \frac{C}{{\sigma_0}^2}$. Hodnotu χ^2 o 10 stupňoch voľnosti pri testovaní na hladine $\alpha = 0.05$ nájdeme v tabuľkách. Teda

$$2.558 \geq \frac{C}{{\sigma_0}^2},$$

z čoho dostávame: $C = 18.309 \cdot 0.5^2 = 4.57725$. V tomto prípade $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 5.20005$ a vidíme, že:

$$5.20005 > 4.57725 = C,$$

teda hypotézu, že rozptyl dát je menší alebo rovný ako 0.5, zamietame na hladine 5%.

b) Použijeme rovnakú úvahu ako v predošlom prípade, takže dostávame:

$$C = 18.309 \cdot 0.64 = 11.71776,$$

$$5.20005 < 11.71776.$$

Hypotézu $\sigma \leq 0.8$ na hladine 5% nezamietame.

Kapitola 3

Rovnomerne najsilnejší nestranný test

3.1 Nestrannosť a testovanie hypotéz

Pri neexistencii UMP testu pridávame prirodzený požiadavok nestrannosti testu (popísaný nižšie), ktorý už existenciu optimálneho testu (v tomto užšom slova zmysle) v mnohých dôležitých prípadoch zaručí.

Definícia 3.1 (Nestranný test, striktne nestranný test)**.** Test ϕ, pre ktorý platí podmienka uvedená vyššie a ktorého silofunkcia $\beta_\phi(\theta) = E_\theta \phi(x)$ spĺňa

$$\begin{array}{lll} \beta_\phi(\theta) \leq \alpha & \text{ak} & \theta \in \Theta_0, \\ \beta_\phi(\theta) \geq \alpha & \text{ak} & \theta \in \Theta_1, \end{array} \tag{3.1}$$

sa nazýva **nestranný test**. Ak sila testu je $> \alpha$ pre všetky $\theta \in \Theta_1$, potom sa tento test nazýva **striktne nestranný**.

Definícia 3.2 (Rovnomerne najsilnejší nestranný test)**.** Určme najsilnejší test pre každú hodnotu z množiny $\Theta \setminus \Theta_0 = \Theta_1$. Každý takýto čiastkový test môže mať obecne iný kritický obor, resp. inú testovú funkciu. Ak ale nastane situácia, že všetky dielčie testy budú mať rovnaký kritický obor, bolo by vhodné test H_0 proti alternatíve H_1 založiť práve na tomto spoločnom kritickom obore. Takémuto testu hovoríme **rovnomerne najsilnejší** test H_0 proti H_1. Obmedzme len na testy, ktorých hladina $\alpha \in (0, 1)$ a ktoré pre ľubovoľné $\theta \in \Theta_1$ zamietajú H_0 s pravdepodobnosťou najmenej rovnou α, teda sa obmedzíme na nestranné testy. Rovnomerne najsilnejší test medzi všetkými nestrannými testami sa nazýva **rovnomerne najsilnejší nestranný test** (UMPU[1]).

Dôsledok 3.3. *Kedykoľvek existuje UMP test, je zároveň aj nestranným testom.*

[1]Uniformly Most Powerful Unbiased

Dôkaz. Tvrdenie plynie z toho, že ak je test ϕ najsilnejší, jeho sila nemôže klesnúť pod silu testu $\phi^*(x) = \alpha$. $\square$

To, že neexistuje UMP test sa stáva hlavne v prípade hypotéz tvaru: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_0$, kde rozdelenie náhodných pozorovaní závisí popri θ aj na iných parametroch.

Definícia 3.4 (Testy podobné na hranici)**.** Ak $\beta_\phi(\theta)$ je spojitou funkciou parametru θ, z nestrannosti vyplýva

$$\beta_\phi(\theta) = \alpha \quad \text{pre všetky } \theta \in \omega, \tag{3.2}$$

kde ω je spoločná hranica Θ_0 a Θ_1, teda je to množina bodov θ, ktoré sú bodmi alebo limitnými bodmi oboch množín Θ_0, Θ_1. Testy spĺňajúce túto podmienku sa nazývajú **testy podobné na hranici**.

Keďže je výhodnejšie pracovať s (3.2) ako s (3.1), nasledujúca Lemma hrá dôležitú úlohu pri určovaní UMPU testov.

Lemma 3.5. *Nech P_θ sú rozdelenia také, že silofunkcia každého testu je spojitá, a ak ϕ_0 je UMP test medzi všetkými testami spĺňajúcimi* (3.2) *a je α-testom pre H_0, potom ϕ_0 je UMPU.*

Nech θ je reálny parameter a $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor s pravdepodobnostnou hustotou (vzhľadom k nejakej miere μ)

$$p_\theta(x) = C(\theta) e^{\theta T(x)} h(x).$$

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že UMP test existuje, keď hypotéza H_0 a alternatívy H_1 sú dané

- $H_0 : \theta \leq \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0$ (Dôsledok 2.10)

- $H_0 : \theta \leq \theta_1$ alebo $\theta \geq \theta_2 (\theta 1 < \theta 2), \quad H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ (Veta 2.20)

- ale nie pre $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad H_1 : \theta < \theta_1$ alebo $\theta > \theta_2$.

Dá sa ukázať, že v poslednom prípade existuje UMPU test daný:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad T(x) < C_1 \text{ alebo } > C_2, \\ \gamma_i & \text{ak} \quad T(x) = C_i, \quad i = 1, 2, \\ 0 & \text{ak} \quad C_1 < T(x) < C_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

kde C_1, C_2 a γ_1, γ_2 spĺňajú

$$E_{\theta_1}\phi(X) = E_{\theta_2}\phi(X) = \alpha. \tag{3.4}$$

A tiež, že existuje UMPU test pre $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Viď [2], str.135, 136.

3.2 UMPU testy pre viacparamatrické rozdelenia exponenciálneho typu

Dôležitá trieda hypotéz sa týka reálneho parametru v exponenciálnom type rozdelenia, kde zostávajúce parametre sú nešpecifikované. V mhohých ďalších prípadoch UMPU test existuje a môže byť zostavený pomocou predošlej podkapitoly. Nech X má rozdelenie odpovedajúce

$$C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}) \exp\{\boldsymbol{\theta} U(x) + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\vartheta}_i T_i(x)\} \mathrm{d}\mu(x), \quad (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta),$$

a nech $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$ a $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_k)$. Môžeme teraz uvažovať testovanie nasledujúcich hypotéz H_0^j proti alternatívam H_1^j, $j = 1, \ldots, 4$:

$$\begin{array}{ll}
H_0^1 : \theta \leq \theta_0 & H_1^1 : \theta > \theta_0 \\
H_0^2 : \theta \leq \theta_1 \text{ alebo } \theta \geq \theta_2 (\theta_1 < \theta_2) & H_1^2 : \theta_1 < \theta < \theta_2 \\
H_0^3 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 & H_1^3 : \theta < \theta_1 \text{ alebo } \theta > \theta_2 \\
H_0^4 : \theta = \theta_0 & H_1^4 : \theta \neq \theta_0.
\end{array}$$

Môžeme predpokladať, že parametrický priestor Θ je konvexný a že má dimenziu $k+1$, to znamená, že nie je obsiahnutý v žiadnom lineárnom priestore dimenzie $< k+1$. Toto nastáva najmä vtedy, keď Θ je prirodzený parametrický priestor z rozdelení exponenciálneho typu. Môžeme tiež predpokladať, že Θ obsahuje body, pre ktoré θ je $<$ a $>$ ako θ_0, θ_1, θ_2. Pozornosť môže byť dalej upriamená na suficientné štatistiky (U, T), ktoré majú združené rozdelenie

$$dP_{\theta,\vartheta}^{U,T}(u,t) = C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}) \exp\{\boldsymbol{\theta} u + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\vartheta}_i t_i(x)\} \mathrm{d}\nu(u,t), \quad (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta). \tag{3.5}$$

Keď $T = t$ je dané, U je jediná ostávajúca náhodná veličina, z Lemma 8 (viď [2], kapitola 2) je podmienené rozdelenie U vzhľadom k t hustotou exponenciálneho typu

$$dP_\theta^{U|t}(u) = C_t(\boldsymbol{\theta}) e^{\theta u} \mathrm{d}\nu_t(u).$$

Za tejto podmienky vieme z Dôsledku 2.10, že existuje UMP test pre testovanie H_0^1 s kritickou funkciou ϕ_1 spĺňajúcou

$$\phi_1(u,t) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad u > C_0(t), \\ \gamma_0(t) & \text{ak} \quad u = C_0(t), \\ 0 & \text{ak} \quad u < C_0(t), \end{cases} \tag{3.6}$$

kde $C_0(t)$ a $\gamma_0(t)$ spĺňajú

$$E_{\theta_0}[\phi_1(U,T)|t] = \alpha \quad \forall\, t. \tag{3.7}$$

Pre testovanie H_0^2 v tejto situácii vieme vďaka Vete 2.20, že existuje UMP test s kritickou funkciou

$$\phi_2(u,t) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad C_1(t) < u < C_2(t), \\ \gamma_i(t) & \text{ak} \quad u = C_i(t), \quad i = 1,2, \\ 0 & \text{ak} \quad u < C_1(t) \text{ alebo } u > C_2(t), \end{cases} \tag{3.8}$$

kde $C_1(t), C_2(t)$ a $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ spĺňajú

$$E_{\theta_1}[\phi_2(U,T)|t] = E_{\theta_2}[\phi_2(U,T)|t] = \alpha. \tag{3.9}$$

Uvažujme ďalej test ϕ_3 spĺňajúci

$$\phi_3(u,t) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad u < C_1(t) \text{ alebo } > C_2(t), \\ \gamma_i(t) & \text{ak} \quad u = C_i(t), \quad i = 1,2, \\ 0 & \text{ak} \quad C_1(t) < u < C_2(t), \end{cases} \tag{3.10}$$

kde $C_1(t), C_2(t)$ a $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ spĺňajú

$$E_{\theta_1}[\phi_3(U,T)|t] = E_{\theta_2}[\phi_3(U,T)|t] = \alpha. \tag{3.11}$$

Ak $T = t$ je dané, je toto UMPU test pre testovanie H_0^3 a UMP test medzi všetkými testami spĺňajúcimi (3.11).

Nakoniec nech ϕ_4 je kritická funkcia spĺňajúca (3.10) pre $C_1(t), C_2(t)$ a pre $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ spĺňajúce

$$E_{\theta_0}[\phi_4(U,T)|t] = \alpha \tag{3.12}$$

a

$$E_{\theta_0}[U\phi_4(U,T)|t] = \alpha E_{\theta_0}[U|t]. \tag{3.13}$$

Potom pre dané $T = t$ dostávame, že ϕ_4 je UMPU test pre testovanie H_0^4 a UMP medzi všetkými testami spĺňajúcimi (3.12) a (3.13).

Veta 3.6. *Definujme kritické funkcie ϕ_1 pomocou* (3.6) *a* (3.7)*, ϕ_2 pomocou* (3.8) *a* (3.9)*, ϕ_3 pomocou* (3.10) *a* (3.11)*, ϕ_4 pomocou* (3.10)*,* (3.12) *a* (3.13)*. Tieto predstavujú UMPU α-testy pre testovanie hypotéz $H_0^1, \ldots, H_0^4$ v tomto poradí, keď združená hustota štatistík U a T je daná vzorcom* (3.5)*.*

Dôkaz. Viď [2] str. 147, Theorem 3. □

3.3 Štatistiky nezávislé na suficientnej štatistike

Obecný výraz pre UMPU testy pre hypotézy H_0^1 a H_0^4 pre hustotu exponenciálneho typu

$$dP_{\theta,\vartheta}(x) = C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}) \exp\left\{\boldsymbol{\theta} U(x) + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\vartheta}_i T_i(x)\right\} \mathrm{d}\mu(x) \tag{3.14}$$

bol daný vo Vete 3.6. Avšak je nevýhodný pre aplikovanie normálneho rozdelenia a určitých ďalších spojitých rozdelení. Budeme sa snažiť získať vhodnejšiu formu týchto testov, nebudú už vystupovať ako podmienené testy za podmienok U vzhľadom k t, ale budeme budeme ich chcieť vyjadriť iba za podmienky jednej testovej štatistiky.

Pokúsime sa ukázať ekvivalenciu testu daného vo Vete 3.6 s testom uvažovaným ako optimálnym vzhľadom k Vete 3.8.

Obmedzenie touto metódou závisí na existencii štatistiky $V = h(U,T)$, ktorá nezávisí na T, keď $\theta = \theta_0$, a ktorá je pre každé pevné t monotónna v U pre H_0^1 a lineárna pre H_0^4. Kritická funkcia ϕ_1 pre testovanie H_0^1 potom spĺňa

$$\phi_1(v) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad v > C_0, \\ \gamma_0 & \text{ak} \quad v = C_0, \\ 0 & \text{ak} \quad v < C_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

kde C_0 a γ_0 už nezávisia na t a spĺňajú

$$E_{\theta_0}\phi_1(V) = \alpha. \tag{3.16}$$

Podobne test ϕ_4 pre H_4 sa obmedzí na

$$\phi_4(v) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad v < C_1 \text{ alebo } > C_2, \\ \gamma_i & \text{ak} \quad v = C_i, \quad i = 1,2, \\ 0 & \text{ak} \quad C_1 < v < C_2, \end{cases} \tag{3.17}$$

kde C_1, C_2 a γ_1, γ_2 spĺňajú

$$E_{\theta_0}[\phi_4(V)] = \alpha \tag{3.18}$$

a

$$E_{\theta_0}[V\phi_4(V)] = \alpha E_{\theta_0}(V). \tag{3.19}$$

Odpovedajúce obmedzenie pre hypotézy H_0^2 a H_0^3 vyžaduje, aby V bola monotónna v U pre každé pevné t a nezávislá na T, keď $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$. Test ϕ_3 je potom daný (3.17), kde C_1, C_2 a γ_1, γ_2 spĺňajú

$$E_{\theta_1}\phi_3(V) = E_{\theta_2}\phi_3(V) = \alpha. \tag{3.20}$$

Test ϕ_2 pre H_0^2 bude vyzerať

$$\phi_2(v) = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad C_1 < v < C_2, \\ \gamma_i & \text{ak} \quad v = C_i, \quad i = 1,2, \\ 0 & \text{ak} \quad v < C_1 \text{ alebo } v > C_2, \end{cases} \tag{3.21}$$

kde C_1, C_2 a γ_1, γ_2 spĺňajú

$$E_{\theta_1}\phi_2(V) = E_{\theta_2}\phi_2(V) = \alpha, \tag{3.22}$$

teda preň platí

$$\phi_2(v;\alpha) = 1 - \phi_3(v; 1-\alpha).$$

Predošlé výsledky sú zhrnuté v nasledujúcej vete:

Veta 3.7. *Predpokladajme, že rozdelenie X je dané vzorcom* (3.14) *a že*

$$V = h(U, T)$$

je nezávislé na T, keď $\theta = \theta_0$. Potom ϕ_1 je UMPU pre testovanie H_0^1 za predpokladu, že funkcia h je rastúca v u pre každé t, a test ϕ_4 je UMPU pre H_0^4 za podmienky

$$h(u, t) = a(t)u + b(t), \quad a(t) > 0.$$

Testy ϕ_2 a ϕ_3 sú UMPU pre testovanie H_0^2 a H_0^3, ak V nezávisí na T, keď $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$, a ak h je rastúca v u pre každé t.

Dôkaz. Viď [2], str. 190, Theorem 1. □

Veta 3.8 (Basu). *Nech T je úplná suficientná štatistika a nech V je ancilárna štatistika. Potom T a V sú nezávislé.*

Dôkaz. Viď [3], str. 140, Veta 7.69. □

Dôsledok 3.9. *Nech P je hustota exponenciálneho typu daná v* (3.14) *pri pevnej hodnote θ. Potom štatistika V a štatistika T sú nezávislé pre všetky ϑ za podmienky, že V je ancilárna štatistika.*

Dôkaz. Viď [2], str. 191, Corollary 1. □

3.4 Testovanie parametrov normálneho rozdelenia

Hypotézy $\sigma \leq \sigma_0$, $\sigma \geq \sigma_0$, $\mu \leq \mu_0$, $\mu \geq \mu_0$ týkajúce sa rozptylu σ^2 a strednej hodnoty μ normálneho rozdelenia boli prediskutované v predošlej kapitole a bolo ukázané, že na zvyčajných hladinách významnosti existuje UMP test iba pre prvú z týchto hypotéz. Teraz ukážeme, že štandardné testy (pomerom vierohodností) sú UMPU pre hypotézy spomenuté vyššie ako aj pre niektoré odpovedajúce obojstranné problémy. Pre meniace sa μ a σ, hustota

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \tag{3.23}$$

náhodného výberu $X_1, \ldots, X_n$ z $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vytvára dvoj-parametrickú hustotu exponenciálneho typu, ktorá sa zhoduje s (3.14) pre

$$\theta = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad \vartheta = \frac{n\mu}{\sigma^2}, \quad U(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad T(x) = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Z Vety 3.6 preto existuje UMPU test pre hypotézu $\theta \geq \theta_0$, ktorá je pre $\theta_0 = -\frac{1}{2{\sigma_0}^2}$ ekvivalentná s $H_0^1 : \sigma \geq \sigma_0$. Kritický obor tohto testu získame z (3.6) ale s obrátenými nerovnosťami, pretože teraz máme hypotézu $\theta \geq \theta_0$. V tomto prípade dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq C_0(\overline{x}),$$

kde

$$P_{\sigma_0}\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq C_0(\overline{x}) \middle| \, \overline{x} \right\} = \alpha.$$

Ak to prepíšeme ako

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 \leq C_0'(\overline{x}),$$

z nezávislosti $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{i=1} n(X_i - \overline{X})^2$ a $\overline{X}$ vyplýva, že $C_0'(\overline{x})$ nezávisí na $\overline{x}$. Test preto zamieta, keď $\sum_{i=1} n(x_i - \overline{x})^2 \leq C_0'$ alebo ekvivalentne, keď

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{{\sigma_0}^2} \leq C_0, \tag{3.24}$$

kde C_0 určíme z

$$P_{\sigma_0}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{{\sigma_0}^2} \leq C_0 \right\} = \alpha.$$

Keďže $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{{\sigma_0}^2}$ má χ^2-rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti, určujúca podmienka pre C_0 je

$$\int_0^{C_0} \chi_{n-1}^2(y)\mathrm{d}y = \alpha, \tag{3.25}$$

kde χ_{n-1}^2 je hustota náhodnej veličiny, ktorá má rozdelenie χ^2 s $n-1$ stupňami voľnosti. Rovnaký výsledok môžeme záskať pomocou Vety (3.7). Štatistika $V = h(U,T)$ typu, aký je požadovaný vo vete, teda nezávislá na $\overline{X}$ pre $\sigma = \sigma_0$ a všetky μ, má tvar

$$V = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = U - nT^2.$$

V a $\overline{X}$ sú v skutočnosti nezávislé pre všetky μ a σ^2. Keďže $h(u,t)$ je rastúcou funkciou u pre každé t, vyplýva z toho, že UMPU test má obor zamietnutia tvaru $V \leq C_0'$.

Toto odvodenie tiež ukazuje, že UMPU kritický obor pre $H_0^2 : \sigma \leq \sigma_1$ alebo $\sigma \geq \sigma_2$ je

$$C_1 < \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 < C_2, \tag{3.26}$$

kde C_1, C_2 sú určené

$$\int_{C_1/{\sigma_1}^2}^{C_2/{\sigma_1}^2} \chi^2_{n-1}\mathrm{d}y = \int_{C_1/{\sigma_2}^2}^{C_2/{\sigma_2}^2} \chi^2_{n-1}\mathrm{d}y = \alpha. \tag{3.27}$$

Keďže $h(u,t)$ je lineárna v u, je ďalej vidieť, že UMPU test pre $H_0^4 : \sigma = \sigma_0$ má obor prijatia

$$C_1' < \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{{\sigma_0}^2} < C_2' \tag{3.28}$$

s konštantami určenými z

$$\int_{C_1'}^{C_2'} \chi^2_{n-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{n-1}\int_{C_1'}^{C_2'} y\chi^2_{n-1}\mathrm{d}y = 1-\alpha. \tag{3.29}$$

Veta 3.7 pre túto a ďalšie uvažované hypotézy ukazuje, že UMPU test závisí iba na V. Keďže rozdelenie V nezávisí na μ a vytvára hustotu exponenciálneho typu v σ, problematika sa tým redukuje na problematiku odpovedajúcich prípadov pre jednoparametrickú hustotu exponenciálneho typu, ktorú sme už vyriešili. Silu testov uvedených vyššie môžeme získať explicitne získať pomocou rozdelenia χ^2. Napríklad v prípade jednostranné testu (3.24) je sila testu

$$\beta(\theta) = P_\sigma\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \le \frac{C_0{\sigma_0}^2}{\sigma^2}\right\} = \int_0^{\frac{C_0{\sigma_0}^2}{\sigma^2}} \chi^2_{n-1}(y)\mathrm{d}y.$$

Rovnaký postup môžeme aplikovať i na prípad testovania hypotézy

$$\mu \le \mu_0 \quad \text{proti} \quad \mu > \mu_0$$

a

$$\mu = \mu_0 \quad \text{proti} \quad \mu \neq \mu_0.$$

Ako vidieť z transformácie na náhodné veličiny $X_i - \mu_0$, že predpokladom $\mu_0 = 0$ situácia nestratí na obecnosti. Opäť urobíme porovnanie (3.23) s (3.14) a v tomto prípade si budú odpovedať, keď

$$\theta = \frac{n\mu}{\sigma^2}, \quad \vartheta = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad U(x) = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Veta (3.6) potom ukazuje, že existujú UMPU testy pre hypotézy $\theta \le 0$ a $\theta = 0$, tie sú ekvivalentné s $\mu \le 0$ a $\mu = 0$. Keďže náhodná veličina

$$V = \frac{\overline{X}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}} = \frac{U}{\sqrt{T - nU^2}}$$

a náhodná veličina $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ sú nezávislé ak $\mu = 0$, vyplýva z Vety 3.7, že UMPU kritický obor pre $H_0 : \mu \leq 0$ je $V \geq C_0'$ alebo ekvivalentne

$$t(x) \geq C_0, \tag{3.30}$$

kde

$$t(x) = \frac{\sqrt{n}\overline{x}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}}. \tag{3.31}$$

Za účelom aplikovania Vety 3.7 na $H_0^4 : \mu = 0$ položme $W = \overline{X}/\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$. W a $\sum_{i=1}^n X_i^2$ sú tiež nezávislé, keď $\mu = 0$, a naviac W je lineárna v $U = \overline{X}$. Rozdelenie W je symetrické okolo 0, keď $\mu = 0$, a podmienky (3.17), (3.18), (3.19) s W namiesto V sú preto splnené pre kritický obor $|w| \geq C'$ s $P_{\mu=0}\{|W| \geq C'\} = \alpha$. Keďže

$$t(x) = \frac{\sqrt{(n-1)n}W(x)}{\sqrt{1 - nW^2(x)}},$$

absolútna hodnota $t(x)$ je rastúcou funkciou $|W(x)|$ a kritický obor je ekvivalentný s

$$|t(x)| \geq C. \tag{3.32}$$

Z (3.31) vidíme, že $t(X)$ je podiel dvoch nezávislých náhodných veličín: $\sqrt{n}\overline{X}/\sigma$ a $\sqrt{\frac{1}{(n-1)\sigma^2}\sum_{i-1}^n (X_i - \overline{X})^2}$. Menovateľ je druhá odmocnina náhodnej veličiny $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ s rozdelením χ^2 o $n-1$ stupňoch voľnosti vydelenej $n-1$. Rozdelenie čitateľa v prípade, že $\mu = 0$, je $\mathcal{N}(0,1)$. Rozdelenie náhodnej veličiny

$$\frac{\sqrt{n}\overline{X}/\sigma}{\sqrt{\frac{1}{(n-1)\sigma^2}\sum_{i-1}^n (X_i - \overline{X})^2}}$$

sa nazýva *Studentovo t- rozdelenie* o $n-1$ stupňoch voľnosti. Hustota tohto rozdelenia je

$$t_{n-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} \frac{1}{(1 + \frac{y^2}{n-1})^{\frac{1}{2}n}}. \tag{3.33}$$

Rozdelenie je symetrické okolo 0 a konštanty C_0 a C jedno- a obojstranných testov určíme z

$$\int_{C_0}^{\infty} t_{n-1}(y)\mathrm{d}y = \alpha \quad \text{a} \quad \int_{C}^{\infty} t_{n-1}(y)\mathrm{d}y = \frac{\alpha}{2}. \tag{3.34}$$

Pre $\mu \neq 0$ má $t(X)$ tzv. *necentrálne t*-rozdelenie. Poznamenajme, že rozdelenie $t(X)$, a teda i sila testov spomínaných vyššie, závisí iba na parametri necentrality $\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$: predpokladajme, že $\mu'/\sigma' = \mu/\sigma \neq 0$, a označme $c = \mu'/\mu = \sigma'/\sigma$, ktorá je potom tiež rôzna od 0. Ak $X_i' = cX_i$ a X_i majú rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, náhodné veličiny X_i' majú rozdelenie $\mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$. Tiež $t(X) = t(X')$ a preto $t(X')$ má rovnaké rozdelenie ako $t(X)$, ako sme chceli ukázať.

3.5 Intervaly spoľahlivosti

Hranice spoľahlivosti pre parameter θ odpovedajúce hladine spoľahlivosti $1-\alpha$ boli definované v predchádzajúcej kapitole, teda len pre prípad, kedy rozdelenie náhodnej veličiny X záviselo iba na θ. Ak sú tam navyše ešte parametre $\boldsymbol{\vartheta}$, podmienka pre definovanie dolnej hranice spoľahlivosti $\underline{\theta}$ bude vyzerať nasledovne

$$P_{\theta,\vartheta}\{\underline{\theta}(X) \leq \theta\} \geq 1-\alpha \quad \forall\, \theta, \vartheta. \tag{3.35}$$

Podobne aj intervaly spoľahlivosti pre θ na hladine spoľahlivosti $1-\alpha$ sú definované ako množina náhodných intervalov s koncovými bodmi $\underline{\theta}(X)$, $\overline{\theta}(X)$ nasledovne

$$P_{\theta,\vartheta}\{\underline{\theta}(X) \leq \theta \leq \overline{\theta}(X)\} \geq 1-\alpha \quad \forall\, \theta, \vartheta. \tag{3.36}$$

Definícia 3.10 (Koeficient spoľahlivosti)**.** Infímum ľavých strán výrazov (3.35) a (3.36) pre (θ, ϑ) sa nazýva **koeficient spoľahlivosti**.

3.6 Nestranné konfidenčné množiny

Na konfidenčné množiny sa môžeme pozerať ako na testy hypotéz $\theta \in H_0(\theta')$ proti alternatívam $\theta \in H_1(\theta')$ pre meniace sa θ'. Hladina spoľahlivosti $1-\alpha$ potom jednoducho vyjadruje fakt, že všetky testy sú na hladine α a podmienkou sa preto stáva

$$P_{\theta,\vartheta}\{\theta' \in S(X)\} \geq 1-\alpha \quad \text{pre všetky } \theta \in H_0(\theta') \text{ a pre všetky } \vartheta. \tag{3.37}$$

V analógii s odpovedajúcou definíciou pre testy zavedieme pojem nestranná konfidenčná množina:

Definícia 3.11 (Nestranné konfidenčné množiny)**.** Konfidenčné množiny na hladine spoľahlivosti $1-\alpha$ sa nazývajú **nestranné**, ak

$$P_{\theta,\vartheta}\{\theta' \in S(X)\} \leq 1-\alpha \tag{3.38}$$

pre všetky také θ', že $\theta \in H_1(\theta')$, a pre všetky ϑ a θ, teda pravdepodobnosť prekrytia týchto hodnôt nepresiahne hladinu spoľahlivosti.

Definícia 3.12 (Rovnomerne najpresnejšia nestranná konfidenčná množina)**.** Množina konfidenčných množín je **rovnomerne najpresnejšia nestranná** na hladine $1-\alpha$, ak minimalizuje

$$P_{\theta,\vartheta}\{\theta' \in S(X)\}$$

pre všetky θ' také, že $\theta \in H_1(\theta')$, a pre všetky ϑ a θ, vzhľadom k (3.37) a (3.38).

Konfidenčné množiny získané na základe UMPU testov tejto kapitoly sú preto rovnomerne najpresnejšie nestranné. Takisto sa predchádzajúca teória aplikuje aj na konfidenčné intervaly získané v predošlej kapitole.

Lemma 3.13. *Nech X je reálna náhodná veličina s pravdepodobnostnou hustotou $p_\theta(x)$, ktorá má v x monotónny pomer vierohodností. Predpokladajme, že existujú UMPU testy pre hypotézy $H_0(\theta_0) : \theta = \theta_0$ a sú určené obormi prijatia*

$$C_1(\theta_0) \leq x \leq C_2(\theta_0)$$

a sú striktne nestranné. Potom funkcie $C_1(\theta)$, $C_2(\theta)$ sú rýdzo rastúce v θ a najpresnejšie nestranné intervaly spoľahlivosti pre θ sú

$$C_2^{-1}(x) \leq \theta \leq C_1^{-1}(x).$$

Dôkaz. Nech $\theta_0 < \theta_1$ a označme $\beta_0(\theta)$ a $\beta_(\theta)$ silofunkcie testov pre $H_0(\theta_0) : \theta = \theta_0$ a pre $H_0(\theta_1) : \theta = \theta_1$. Zo striktnej nestrannosti testov plynie, že

$$E_{\theta_0}[\phi_1(X) - \phi_0(X)] = \beta_1(\theta_0) - \alpha > 0 > \alpha - \beta_0(\theta_1) = E_{\theta_1}[\phi_1(X) - \phi_0(X)].$$

Teda ani jeden z dvoch intervalov $[C_1(\theta_i), C_2(\theta_1)]$ $(i = 0, 1)$ neobsahuje ten druhý a z [2], str. 85, Lemma 2 (iii) vidíme, že $C_i(\theta_0) < C_i(\theta_1)$ pre $i = 1, 2$. Teda funkcie C_1 a C_2 majú inverznú funkciu a nerovnosti definujúce obor prijatia pre $H_0(\theta)$ sú ekvivalentné s

$$C_2^{-1}(x) \leq \theta \leq C_1^{-1}(x),$$

ako sme chceli dokázať. □

Literatúra

[1] Jurečková J.: Testy parametrických hypotéz. *Poznámky k prednáške.*

[2] Lehmann E.L. (1994): Testing statistical hypothesis. *Chapman & Hall, New York.*

[3] Anděl J. (2007): Základy matematické statistiky. ***matfyz****press, Praha.*

[4] Lachout P. (2004): Teorie pravděpodobnosti. *MFF UK Praha.*